प्रारंभिक शिक्षा में डिप्लोमा
(डी.एल.एड.)

पाठ्यक्रम-504
प्राथमिक स्तर पर गणित सीखना

ब्लॉक-2
गणितीय प्रत्ययों एवं विधियों का संवर्धन

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
A 24/25, सांस्थानिक क्षेत्र, सैक्टर-62 नौएडा,
गौतम बुद्ध नगर उत्तर प्रदेश-201309
वैबसाइट : www.nios.ac.in

श्रेय अंक (4=3+1)

ब्लॉक	इकाई	इकाई का नाम	सैद्धान्तिक अध्ययन घंटे		प्रयोगात्मक अध्ययन
			पठ्य-वस्तु	क्रियाकलाप	
ब्लॉक-1 विद्यालय के प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने का महत्व	**इकाई 1**	बच्चे गणित कैसे सीखते हैं	3	2	गणित सबके लिए, गणितीयमय पर सेमिनार
	इकाई 2	गणित एवं गणितीय शिक्षा: महत्व क्षेत्र एवं सार्थकता	4	2	–
	इकाई 3	गणित शिक्षा के उद्देश्य एवं परिप्रेक्ष्य	4	3	कक्षा के बाहर गणित, अपनी कक्षा में गणित शिक्षा से संबंधित समस्याओं की पहचान
	इकाई 4	अधिगमकर्त्ता एवं अधिगम केन्द्रित विधियाँ	5	3	अपने विद्यालय में गणित क्लब का प्रबंधन
खण्ड-2 गणितीय प्रत्ययों एवं विधियों का संवर्धन	**इकाई 5**	संख्याएं एवं संख्याओं पर संक्रियाएं	5	2	–
	इकाई 6	आकृतियाँ एवं स्थानिक संबंध	5	2	–
	इकाई 7	मापें एवं मापन	4	2	–
	इकाई 8	आँकड़ों का प्रबन्धन	4	3	आँकडों का सांख्यिकीय विश्लेषण
	इकाई 9	सामान्यीकृत अंकगणित के रूप में बीजगणित	4	2	–
ब्लॉक-3 गणित में अधिगमकर्ता का आकलन	**इकाई 10**	गणित अधिगम के आकलन के उपागम	3	2	गणित में प्रत्यय निर्माण की तैयारी एवं पाठ योजनाओं का विकास
	इकाई 11	आकलन के साधन एवं प्रविधियाँ	4	3	गणित प्रयोगशाला के लिए प्रदर्शनियों का विकास
	इकाई 12	गणित अधिगम के आकलन हेतु फोलोअप	3	2	गणित अधिगम में समस्याओं की पहचान एवं उपचार
		शिक्षण	15		
		योग	63	27	30
		कुल योग = 63 + 27 + 30 = 120 घण्टे			

ब्लॉक-2

गणितीय प्रत्ययों एवं विधियों का संवर्धन

खंड प्रस्तावना

इकाई–5

यह इकाई आपको संख्याएं एवं संख्याओं पर संक्रियाओं को समझने में सक्षम बना सकेगी। यह इकाई विभिन्न प्रकार की संख्याओं जैसे प्राकृत संख्याएं एवं पूर्ण संख्याएं, पूर्णाक एवं परिमेय संख्याएं इत्यादि की जानकारी देगी तथा साथ ही साथ संख्याओं पर विभिन्न संक्रियाओं के गुणधर्मों से भी परिचित करायेगी। उभयनिष्ठ गुणनखण्ड एवं उभयनिष्ठ गुणक क्या है? तथा महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्तक के प्रत्यय से भी आप भलीभांति परिचित हो सकेंगे।

इकाई–6

यह इकाई आपको आधारभूत ज्यामितीय आकृतियों को समझने में सक्षम बना सकेगी। अब द्विविमीप बंद आकृतियों जैसे त्रिभुज एवं चतुर्भुज इत्यादि से भलीभांति परिचित हो सकेंगे। वृत्त, सर्वांगसमता, समरूपता, छाया/प्रतिबिम्ब एवं सममिति तथा त्रिविमीय आकृतियां जैसे घन, घनाम, बेलन इत्यादि की समझ विकसित हो सकेगी।

इकाई–7

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप मापन एवं विभिन्न प्रकार के मापको तथा दूरी, क्षेत्रफल, आयतन व भार इत्यादि को अमानक इकाइयों एवं मानक इकाईयों द्वारा किस प्रकार मापा जाता है? को समझने में सक्षम हो सकेंगे। आप मापन की मीट्रिक पद्धति एवं समय के मापन से भी भलीभांति परिचित हो सकेंगे।

इकाई–8

यह इकाई आपको आंकड़ों के प्रबंधन को समझने के योग्य बना सकेगी। आप आंकड़ों के प्रबंधन से संबंधित विभिन्न प्रत्ययों जैसे, आंकड़ों का एकत्रीकरण, आकड़ों का सारणीपन, दण्डालेख, आयत चित्र तथा पाई चार्ट की सहायता से आंकड़ों के चित्रात्मक निरुपण से भलीभांति परिचित हो सकेंगे। केंद्रीय प्रवृत्ति की मापों की सहायता से आंकड़ों के विश्लेषण की समझ विकसित हो सकेंगी।

इकाई–9

यह इकाई आपको संख्याओं के स्थान पर गणितीय चिन्हों के प्रयोग, बीजगणितीय पदों एवं व्यंजकों को समझने में सक्षम बना सकेगी। बीजगणित एवं बीजगणित संबंधी संक्रियाओं जैसे जोड़, घटा, गुणा इत्यादि का गणित में महत्वपूर्ण स्थान है। रैखिक समीकरणों को बनाने एवं हल करने की समझ विकसित हो सकेगी।

आप शिक्षार्थी के रूप में ब्लाक 3 : गणित में अधिगमकर्त्ता का आकलन का अध्ययन करेंगे। इस इकाई में गणित में आकलन से संबंधित तीन इकाईयां है। प्रत्येक इकाई खण्डों एवं उपखण्डों में विभाजित है। आप प्रारंभिक स्तर पर गणित सीखने के महत्व एवं बच्चा गणित कैसे सीखता है। को ब्लाक 1 में तथा ब्लाग 2 में विषय वस्तु संवर्द्धन एवं विधियों के बारे में पहले ही पढ़ चुके है।

विषय सूची

इकाई 5 : संख्याएं एवं संख्याओं पर संक्रियाएं

संरचना

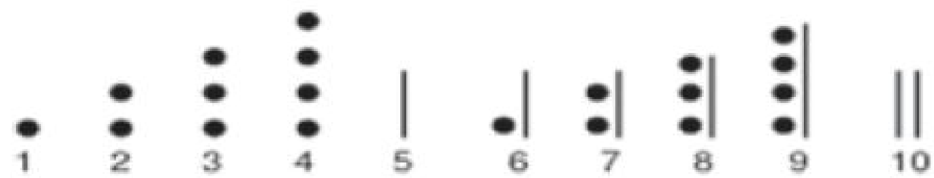
5.1 प्रस्तावना

हमारे दैनिक जीवन में जिन वस्तुओं से हमारा वास्ता पड़ता है अथवा जिनको हम उपयोग में लाते हैं, उनमें से कुछ की राशि (मात्रा) ज्ञात करनी होती है जैसे परिवार में सदस्य,

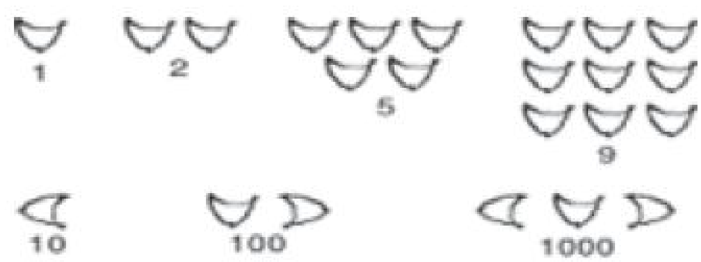
टिप्पणी

कक्षा/विद्यालय में विद्यार्थी, वस्तुएं खरीदने के लिए धन, सब्जियां तथा किराने का सामान, बच्चों के लिए पुस्तकें, घर से विद्यालय की दूरी, कमरे की लम्बाई तथा चौड़ाई, इत्यादि। राशि (मात्रा) ज्ञात करने के लिए संख्याएं आवश्यक हैं। वस्तुओं की गिनती करने, विभिन्न राशियों को व्यक्त करने, लम्बाई, भार, आयतन, समय, आदि को मापने में संख्याओं का ज्ञान आवश्यक है। संख्याएं हमारे जीवन में इतनी घुली मिली हैं कि हम उनके बिना जीवन की कल्पना नहीं कर सकते। किन्तु जिन संख्याओं को आज हम उपयोग में ला रहे हैं, उनका सभ्यता के प्रारंभ में अन्वेषण नहीं हुआ था। विभिन्न प्राचीन सभ्यताओं में भिन्न भिन्न संख्या प्रणालियां विकसित हुई। आइए, विभिन्न प्राचीन सभ्यताओं में विकसित कुछ संख्या प्रणालियों पर दृष्टि डालें :

मायन प्रणाली



बेबीलोनियन प्रणाली



रोमन प्रणाली

I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**	**X**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	**XII**	**XIII**	**XIV**	**XV**	**XVI**	**XVII**	**XVIII**	**XIX**	**XX**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXX	**XL**	**L**	**LX**	**LXX**	**LXXX**	**XC**	**C**	**CC**	**CCC**
30	40	50	60	70	80	90	100	200	300
CD	**D**	**M**							
400	500	1000							

संख्याओं की इन प्रणालियों में विभिन्न संख्याओं के लिए संख्यांकों को याद रखना कठिन कार्य था। इसके अतिरिक्त, इनमें योग, व्यवकलन, आदि विभिन्न संक्रियाएं करना कठिन था।

टिप्पणी

भारत का योगदान

आधुनिक दाशमिक प्रणाली, अर्थात दस अंकों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 तथा 9 पर आधारित संख्याओं को मूलतः भारतीयों ने अभिकल्पित किया तथा इसे अरब वासियों ने पहले अपने देश, तत्पश्चात पश्चिमी संसार में फैलाया। अतएव, इस संख्यांकन प्रणाली को हिंदू-अरेबिक संख्यांकन नाम दिया गया।

संख्याओं की दूसरी प्रणालियों की तुलना में इस प्रणाली का एक अद्वितीय लाभ है कि संख्या चाहे कितनी भी बड़ी हो, इसे इन्हीं दस अंकों के प्रयोग से व्यक्त किया जा सकता है।

किसी संख्या में स्थानीय मान

इन दस अंकों से दस एकांकी संख्याएं अभिव्यक्त होती हैं। यदि हमें 9 से बड़ी किसी संख्या की आवश्यकता है, तो हम दो अंकों वाली संख्याओं, यथा 10, 11, 12, ..., 25,.... 59,.... 98 तथा 99, का सर्जन करते हैं। आपको भली भांति ज्ञात है कि किस प्रकार इन संख्याओं का सर्जन किया गया है। इन दो अंकीय संख्याओं में अंकों के दो स्थान निर्धारित होते हैं, दायीं ओर के स्थान को इकाई का स्थान तथा बायीं ओर के स्थान को दहाई का स्थान कहते हैं।

इकाई के स्थान में अंकों के मान एकिक होते हैं, जैसे संख्या 26 में, इकाई के स्थान पर संख्या 6 है तथा इसका मान भी 6 है। संख्या 26 में दहाई के स्थान पर संख्या 2 का स्थानीय मान दो दहाई (20) है जबकि इसका प्रत्यक्ष मान 2 है। इसी प्रकार, सैंकड़े के स्थान पर स्थित किसी अंक का स्थानीय मान उसके प्रत्यक्ष मान का 100 गुना होता है। इन सभी स्थानीय मानों से आप भली भांति परिचित हैं। किंतु एक अंक ऐसा भी है जिसका स्थानीय मान सभी स्थानों पर एक समान रहता है। आप जानते हैं कि वह अंक 0 (शून्य) है। हिंदू संख्या प्रणाली में शून्य का एक अद्वितीय योगदान है। इसे चाहे किसी भी स्थान पर रखा जाए इसका स्थानीय मान शून्य होता है। फिर, इसका महत्त्व क्या है?

किसी तीन-अंकीय संख्या, जैसे 308, पर विचार कीजिए। दहाई के स्थान पर स्थित अंक 0 का स्थानीय मान शून्य है। किंतु कल्पना कीजिए कि यदि संख्या 0 न हो, तो 308 जैसी संख्याओं का क्या होगा? संख्या कम होकर 38 रह जायेगी तथा एक पूर्ण भ्रम की स्थिति उत्पन्न हो जायेगी। यहां, 0 अपना निधारित स्थान अविकल रखता है तथा संख्या को उचित पहचान प्रदान करता है। अत: 0 को दाशमिक संख्या प्रणाली में स्थान-धारक कहा जाता है।

इस इकाई में हम दैनिक जीवन में प्रयुक्त होने वाली संख्याओं की कुछ अत्यधिक मूल-पद्धति तथा संख्या प्रणाली की चार मूल संक्रियाओं के गुणों के विषय में चर्चा करेंगे।

इस इकाई को पूरा करने में हमें कम से कम 10 (दस) अध्ययन-घंटों की आवश्यकता होगी।

5.2 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि

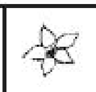
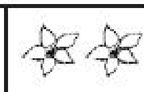
- दाशमिक प्रणाली में संख्याओं का महत्व समझ सकें।
- भिन्न-भिन्न संख्या समूहों, उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं, पूर्णांकों तथा परिमेय संख्याओं को पहचान सकें।
- विभिन्न संख्या समूहों में मूल संक्रियाओं योग, व्यवकलन, गुणा तथा भाग के गुणों को जान सकें।
- प्राकृत संख्या समूह में गुणन खंडों तथा गुणजों को ज्ञात कर सकें।

5.3 संख्याओं के विभिन्न समूह

5.3.1 गणन संख्याएं तथा पूर्ण संख्याएं

पुरातन व्यक्ति का प्रमुख उद्देश्य, जिसके कारण उसे एक संख्या प्रणाली की आवश्यकता थी, वस्तुओं की गिनती करना था। अतएव, उसने गणन संख्याओं का सर्जन किया। इन्हें **प्राकृत संख्याएं** भी कहा जाता है।

उसने संख्याओं का वस्तुओं के समूहों से मिलान किया जैसा नीचे प्रदर्शित किया गया है:

वस्तु समूह				
संख्या का नाम	एक	दो	तीन	चार
संख्यांक	1	2	3	4

इस प्रकार, गणन संख्या प्रणाली में प्रत्येक संख्या एक अद्वितीय वस्तु-समूह से सम्बद्ध है। प्रेक्षण करने पर आप पाते हैं कि

(i) सबसे छोटी गणन संख्या 1 है।

(ii) प्रत्येक गणन संख्या की एक परवर्ती संख्या होती है तथा प्रत्येक परवर्ती संख्या संबंधित संख्या से 1 अधिक होती है, अर्थात 4 की परवर्ती संख्या 5 है तथा 29 की परवर्ती संख्या 30 है।

(iii) (1 के अतिरिक्त) प्रत्येक गणन संख्या की एक पूर्ववर्ती संख्या होती हैं अर्थात् 7 की पूर्ववर्ती संख्या 6 है तथा 60 की पूर्ववर्ती संख्या 59 है।

उपर्युक्त (ii) से निष्कर्ष निकलता है कि बड़े से बड़ी संख्या से भी बड़ी संख्या विद्यमान है।

पूर्ण संख्याएं

आपने देखा कि 0 को प्राकृत संख्याओं में सम्मिलित नहीं किया गया है। ऐसा इसलिए है क्योंकि वस्तुओं की गिनती 1 से आरंभ होती है। किन्तु जब हम संख्याओं को संख्याकों के द्वारा निरुपित करते हैं, तो हम संख्याओं 10, 20, 30, ..., 100 आदि के निरुपण में 0 का प्रयोग करते हैं। वस्तुओं को सरलतर बनाने के लिए प्राकृत संख्याओं के समूह में 0 को सम्मिलित करते हैं जिससे नया संख्या समूह 'पूर्ण संख्याएं' बनता है जिसे 'W' द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

आगे बढ़ने से पहले अपनी प्रगति की जांच कीजिए :

E1. गणन संख्या 1 की कोई भी पूर्ववर्ती संख्या क्यों नहीं होती है?

E2. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन सी है?

E3. 8 के स्थानीयमान तथा प्रत्यक्ष मान का अंतर कितना होगा यदि यह

(i) इकाई के स्थान पर हो?

(ii) दहाई के स्थान पर हो?

(iii) सैकड़े के स्थान पर हो?

5.3.2 पूर्णांक

हमें दैनिक जीवन की विभिन्न स्थितियों में परस्पर विरोधी मापन प्राप्त होते हैं जैसे

लाभ-हानि पाना-देना जमा करना-निकालना

ऊपर की ओर-नीचे की ओर

परस्पर विरोधी मापनों के ऐसे युग्मों में एक संतुलन की स्थिति होती है जैसा कि नीचे तालिका में प्रदर्शित किया गया है।

परस्पर विरोधी मापन	संतुलित स्थिति
लाभ-हानि	न लाभ न हानि
पाना-देना	न पाना न देना
जमा करना-निकालना	न जमा न निकाल
ऊपर की ओर-नीचे की ओर	न ऊपर की ओर न नीचे की ओर

उपर्युक्त प्रत्येक उदाहरण में यह देखा जा सकता है कि संतुलित स्थिति शून्य-स्तर निरुपित करती है।

इस प्रकार व्यक्तियों ने संख्याओं 1, 2, 3 आदि को विरोधी प्रवृत्ति वाली संख्याओं के सर्जन करने के विषय में सोच विचार किया।

टिप्पणी

इसलिए हमें हमें विरोधी प्रवृत्ति वाले निम्नलिखित संख्या-युग्म प्राप्त हुए

+1 तथा –1

+2 तथा –2

उपर्युक्त +3 तथा –3, इत्यादि

प्रत्येक परस्पर विरोधी युग्म की संतुलित संख्या शून्य है। अत: हमें प्राप्त हुआ

$$(+1) + (-1) = 0$$

$$(+2) + (-2) = 0$$

$(+3) + (-3) = 0$, इत्यादि

संख्याओं की श्रेणी, जो अब हमें प्राप्त होती है, है :

...., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

संख्याओं के इस समूह को **पूर्णांक** कहते हैं

+1, +2, +3, +4, ... **धन पूर्णांक** तथा –1, –2, –3, –4, ... **ऋण पूर्णांक** कहे जाते हैं।

> पूर्णांको के समूह को प्रतीक Z द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।
>
> (i) कोई ऐसा पूर्णांक नहीं है जिसे सबसे बड़ा कहा जा सके। कितना भी बड़ा पूर्णांक आप सोचें, उससे भी बड़े पूर्णांक का अस्तित्व होता है।
>
> (ii) कोई ऐसा पूर्णांक नहीं है जिसे सबसे छोटा कहा जा सके। कितना भी छोटा पूर्णांक आप सोचें, उससे भी छोटे पूर्णांक का अस्तित्व होता है।
>
> (iii) पूर्णांकों की श्रेणी में शून्य (0) को छोड़ कर प्रत्येक $+p$ के लिए, एक $-p$ का अस्तित्व होता है ताकि $+p+(-p)=0$ हो। $+p$ तथा $-p$ परस्पर विरोधी कहे जाते हैं।

पूर्णांकों को क्रम में लगाना तथा उन्हें संख्या रेखा पर निरुपित करना

निम्नलिखित पूर्णांकों की श्रेणी दायीं ओर बढ़ती जाती है तथा बायीं ओर घटती जाती है :

...., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

इस प्रकार

..... $<-3<-2<-1<0<+1<+2<+3$ ...

हम यह मानते है कि पूर्णांकों को निरुपित करने के लिए एक सरल रेखा के बिंदुओं का प्रयोग किया जा सकता है। इसकी प्रक्रिया नीचे दी गयी है।

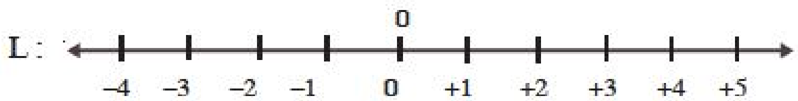
(i) एक सरल रेखा खींचिए तथा इसे L से नामांकित कीजिए। (यहां L पूरी रेखा को निर्दिष्ट करता है। यह इसके किसी एक बिंदु को नामांकित नहीं करता।)

(ii) इस पर समान अंतराल पर बिंदु चिन्हित कीजिए।

(iii) उसके किसी बिंदु को 0 से नामांकित कीजिए और इसे शून्य द्वारा निरुपित कीजिए।

(iv) अब 0 के दायीं ओर के बिंदुओं को क्रमानुसार +1, +2, +3, आदि से निरुपित कीजिए।

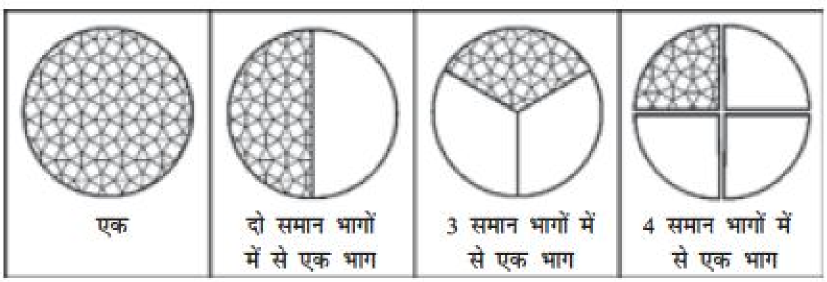
(v) 0 के बायीं ओर के बिंदुओं को क्रमानुसार –1, –2, –3, आदि द्वारा निरुपित कीजिए।



अब हम कहते हैं कि रेखा L एक **संख्या रेखा** है।

5.3.3 परिमेय संख्याएं

आइए, अब एक सम्पूर्ण के भागों पर दृष्टि डालें।

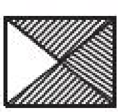


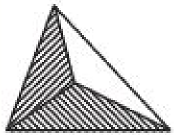
किसी वस्तु के भागों को निरुपित करने के लिए उपर्युक्त प्रदर्शन के अनुसार बनायी गयी संख्याएं नीचे दी गयी हैं।

दो समान भागों में से एक भाग : $\frac{1}{2}$ (आधा, एक बटा दो)

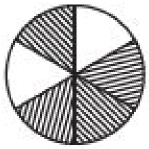
3 समान भागों में से एक भाग : $\frac{1}{3}$ (एक तिहाई, एक बटा तीन)

4 समान भागों में से एक भाग : $\frac{1}{4}$ (एक चौथाई, एक बटा चार)

 $\frac{3}{4}$ निरुपित करता है। [3 अंश है तथा 4 हर है।]



$\frac{2}{3}$ निरुपित करता है। [2 अंश है तथा 3 हर है।]



$\frac{4}{6}$ निरुपित करता है। [4 अंश है तथा 6 हर है।]

किसी पूर्ण वस्तु के विभिन्न भागों को मापने के लिए रचित संख्याओं को **भिन्नात्मक संख्याएं** (अथवा **भिन्न**) कहा जाता है।

भिन्नों के विभिन्न प्रकार होते हैं :

(i) सम भिन्न : $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{5}{7}$ सम भिन्न हैं जहां अंश $<$ हर

(ii) विषम भिन्न : $\frac{5}{3}, \frac{11}{7}, \frac{28}{5}$ विषम भिन्न हैं जहां अंश $>$ हर

(iii) मिश्रित संख्या : $2\frac{1}{3}, 3\frac{2}{7}$, आदि मिश्रित संख्याएं हैं तथा इनमें से प्रत्येक को एक विषम भिन्न में परिवर्तित किया जा सकता है तथा एक विषम भिन्न को मिश्रित संख्या में परिवर्तित किया जा सकता है जैसे

$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3},\ 3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$$

(iv) इकाई-भिन्न : एक भिन्न जिसका अंश 1 हो, इकाई-भिन्न होती है। $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}$ इकाई भिन्नों के उदाहरण हैं।

(v) तुल्य भिन्न : जब किसी भिन्न के अंश और हर दोनों को किसी धन पूर्णांक से गुणा किया जाता है तो भिन्न आकार में बदल जाती है किंतु मान में नहीं बदलती। इस प्रकार परिणामी भिन्न आरंभिक भिन्न के बराबर ही रहती है। जिन भिन्नों के मान समान होते हैं, उन्हें तुल्य भिन्न कहते हैं। उदाहरणार्थ

(a) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$; इस प्रकार $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}$ तुल्य भिन्न हैं।

(b) $\frac{40}{16}=\frac{20}{8}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$; इस प्रकार $\frac{40}{16},\frac{20}{8},\frac{10}{4},\frac{5}{2}$ तुल्य भिन्न हैं।

(vi) सम हर भिन्न : वे भिन्न जिनके हर समान होते हैं, सम हर भिन्न कहलाती हैं।

$\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{3}{15},\frac{4}{15}$ सम हर भिन्नों के उदाहरण हैं।

परिमेय संख्याएं

वे संख्याएं, जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो जबकि p तथा q पूर्णांक हों तथा $q \neq 0$, परिमेय संख्याएं कहलाती हैं। परिमेय संख्याओं को प्रतीक Q द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। स्पष्टत: एक भिन्न एक परिमेय संख्या होती है।

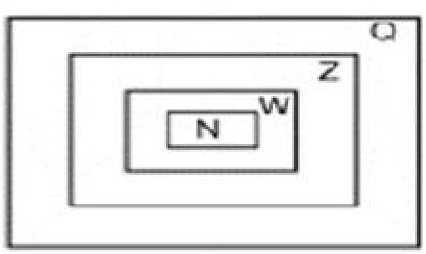
परिमेय संख्याओं के उदाहरण हैं :

$$\frac{2}{7},\frac{-3}{4},\frac{0}{5},\frac{4}{-9}$$

निम्नलिखित का ध्यानपूर्वक अवलोकन कीजिए :

$$1=\frac{3}{3},\ 2=\frac{10}{5},\ -4=\frac{-8}{2},\ 0=\frac{0}{9}$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि सभी पूर्णांकों को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है जहां p तथा q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है। इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है। यहां दिया गया प्राकृत संख्याओं (N), पूर्ण संख्याओं (W) पूर्णांक (Z) तथा परिमेय संख्याओं (Q) को संयोजित करने वाला आरेख उनके अंत-सँबंध को प्रदर्शित करता है। Q में सभी पूर्णांक तथा $\frac{1}{2},\frac{2}{7},\frac{-3}{8}$ आदि जैसी अपूर्ण संख्याएं सम्मिलित हैं।



टिप्पणी

Z में सभी पूर्ण संख्याएं तथा -1, -2, -3 जैसे ऋणात्मक पूर्णांक सम्मिलित हैं।

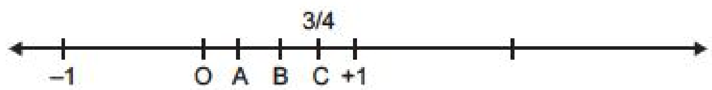
W में सभी प्राकृत संख्याएं तथा शून्य सम्मिलित हैं।

संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएं

हम पहले देख चुके हैं कि पूर्णांकों को एक संख्या-रेखा पर किस प्रकार प्रदर्शित किया जाता है। अब हम संख्या-रेखा पर परिमेय संख्याओं को प्रदर्शित करेंगे।

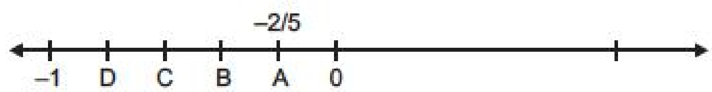
आइए, हम (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $-\frac{2}{5}$ (iii) $2\frac{2}{3}$ को एक संख्या-रेखा पर प्रदर्शित करें।

हम जानते हैं कि $\frac{3}{4}$ किसी सम्पूर्ण के 4 बराबर भागों में से 3 भागों के बराबर है।



यहां संख्या-रेखा को o तथा +1 के बीच के भाग को 4 बराबर भागों में विभाजित किया गया है तथा A, B तथा C संपूर्ण (0 से 1) के 4 बराबर भागों के विभाजन बिंदु हैं।

संख्या-रेखा पर O से C तक 1 भाग के 4 बराबर भागों में से 3 भाग होते हैं। अत: संख्या रेखा पर बिंदु C, $\frac{3}{4}$ को निरुपित करता है। नीचे संख्या-रेखा पर $\frac{-2}{5}$ को बिंदु B निरुपित करता है।



इसी प्रकार नीचे संख्या-रेखा पर बिंदु $B, \frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ को निरुपित करता है।

एक परिमेय संख्या को लिखने का मानक रूप

जब किसी परिमेय संख्या को ऐसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जाता है ताकि p तथा q का उभयनिष्ठ गुणनखंड केवल 1 हो एवं $q>0$ हो, तो संख्या को मानक रूप में लिखा गया कहा जाता है।

अगले अनुच्छेद पर जाने से पहले अपनी प्रगति की जांच कीजिए।

E4 बताइए निम्नलिखित कथन 'सत्य' हैं अथवा 'असत्य' :

(a) सभी प्राकृत संख्याएं पूर्णांक हैं।

(b) सभी पूर्णांक पूर्ण संख्याएं हैं।

(c) पूर्ण संख्याएं परिमेय संख्याएं नहीं हैं।

(d) ऋणात्मक पूर्णांक परिमेय संख्याएं नहीं हो सकते।

(e) सभी परिमेय संख्याएं पूर्णांक नहीं हैं।

5.4 संख्याओं पर संक्रियाओं के गुण

हम चार मूल संक्रियाओं–योग, घटा, गुणा तथा भाग से पूरी तरह परिचित हैं तथा उन्हें कार्यान्वित करने में सक्षम हैं। इस खण्ड में आप इन संक्रियाओं के गुणों को जानेंगे जब इन्हें विभिन्न संख्या समूहों पर निष्पादित किया जाता है।

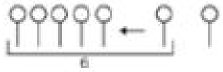
5.4.1 प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएं

जैसा आप पहले से ही जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं का समूह प्राकृत संख्याओं के समूह में केवल '0' सम्मिलित करने से बनता है, इन दोनों समूहों की संख्याओं पर चार मूल संक्रियाएं लगभग समान हैं, इसीलिए इन पर इसी अनु-खण्ड में एक साथ चर्चा की गयी है।

(a) योग :

जब समान वस्तुओं के दो संग्रहों को एक साथ रख दिया जाता है, तो नये संग्रह में वस्तुओं की कुल संख्या कैसे ज्ञात की जाए। मान लीजिए कि 2 माचिस की तीलियों को 5 माचिस की तीलियों के साथ मिलाया जाता है। हम बच्चों को उनका योग करना दो विधियों से सिखा सकते हैं। एक विधि तो यह है कि दोनों संग्रहों को एक साथ रख लिया जाए तथा मिश्रित संग्रह में माचिस की तीलियों को गिन लिया जाए। दूसरी विधि यह है कि एक संग्रह (मान लीजिए 5 माचिस की तीलियों वाला संग्रह) को अखंड रख लिया जाए तथा दूसरे संग्रह से एक-एक करके उसमें तीलियां जोड़ी जाएं जैसा कि नीचे प्रदर्शित किया गया हैं

$5 + 2$



$= (5+1) + 1$

$= (6+1)$

$= 7$

टिप्पणी

प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं में योग के कुछ गुण

(i) **संवृतता का गुण :** दो प्राकृत/पूर्ण संख्याओं का योग एक प्राकृत/पूर्ण संख्या होता है।

(ii) **क्रम विनिमेय गुण :** $p + q = q + p$ जहां p, q प्राकृत/पूर्ण संख्याएं है।

(iii) **सहचारी गुण :** $(p + q) + r = p + (q + r)$ जहां, p, q, r प्राकृत/पूर्ण संख्याएं हैं।

(iv) **पूर्ण संख्याओं में योज्य तत्समक :** पूर्ण संख्याओं के समूह में, 4+0=0+4=4 होता है। इस प्रकार p+0=0+p=p (जहां p कोई पूर्ण संख्या है।) अतएव, 0 को पूर्ण संख्याओं का **योज्य तत्समक** कहा जाता है।

(b) **व्यवकलन (घटाना)**

व्यवकलन से अभिप्राय हटाने से है। वस्तुओं के किसी समूह से हम कुछ को अथवा सभी को हटा सकते हैं। उदाहरणार्थ, 5 वस्तुओं में से हम 5 से कम अथवा सभी 5 वस्तुओं को हटा सकते हैं। किसी वस्तु–समूह से जब सभी वस्तुएं हटा ली जाती है तो शेष कुछ नहीं रहती और क्योंकि 'कुछ नहीं होने' को शून्य द्वारा निरुपित किया जाता है, p–p=0 (जहां p एक पूर्ण संख्या है।)

(c) **गुणन**

गुणन किसी संख्या के स्वयं के साथ बारंबार योग को निरुपित करता है। उदाहरणार्थ,

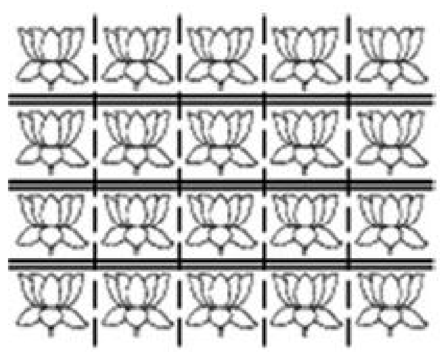
3+3 को 3×2 से निरुपित किया जाता है।

3+3+3 को 3×3 से निरुपित किया जाता है।

3+3+3+3 को 3×4 से निरुपित किया जाता है।

गुणन के गुण

(i) **क्रम विनिमेय गुण :** नीचे दी गयी सारणी को ध्यान पूर्वक देखिए :

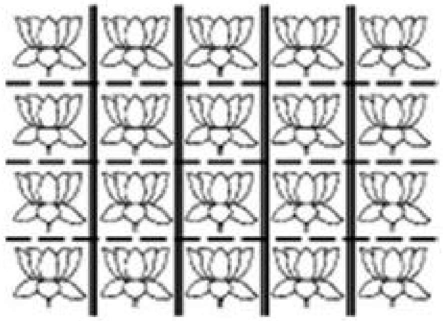


प्रत्येक पंक्ति में 5 फूल

4 पंक्तियां हैं

फूलों की कुल संख्या = 5+5+5+5 अथवा 5x4 = 20

उपर्युक्त संग्रह नीचे प्रदर्शित किया गया है :



प्रत्येक स्तंभ में 4 फूल

5 स्तंभ हैं।

फूलों की कुल संख्या = 4+4+4+4+4 = 4x5 = 20

किन्तु दोनों संग्रहों में फूलों की संख्या समान है।

अतः यह प्राप्त हुआ कि 5x4 = 4x5

दूसरे शब्दों में, यदि p तथा q दो प्राकृत/पूर्ण संख्याएं हैं, तो pxq=qxp

अतः प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं में गुणन क्रम विनिमेय है।

(ii) संवृतता का गुण : यदि p तथा q प्राकृत अथवा पूर्ण संख्याएं हैं, तो pxq भी एक प्राकृत अथवा पूर्ण संख्या होती है। हम कहते हैं कि प्राकृत/पूर्ण संख्याएं गुणन में संवृत्त हैं।

(iii) सहचारी गुण : (pxq)xr = px(qxr) [जहां p,q तथा r कोई तीन प्राकृत/पूर्ण संख्याएं हैं।]

(iv) गुणन तत्समक : गुणन के संदर्भ में संख्या 1 का निम्नलिखित विशेष गुण है :

px1=1xp=p (जहां p एक प्राकृत/पूर्ण संख्या है।)

अतः हम कहते हैं : संख्या '1' गुणन का तत्समक है।

(v) गुणन का योग पर वितरण गुण :

p x (q+r) = pxq + pxr

हम कहते हैं, ''गुणन योग पर वितरित होता है।''

उदाहरण : 5x(3+4) = 5x7=35

तथा 5x3+5x4=15+20=35

अतः 5x(3+5) = 5x3+5x4

टिप्पणी

(d) भाग

जब p तथा q प्राकृत संख्याएं होती हैं तथा $p \times q = r$ होता है, हम करते हैं :

- 'r' 'p' से विभाजित है तथा 'r' 'q' से विभाजित है।
- 'p' तथा 'q' में से प्रत्येक 'r' का एक गुणन खंड है।
- 'r', 'p' तथा 'q' में से प्रत्येक का एक गुणज है।

हम चिन्ह '÷' का प्रयोग करते हैं तथा लिखते हैं

$r \div p = q$ तथा $r \div q = p$

उदाहरणार्थ, 3x5 = 15 । इससे हम कहते हैं

(i) 15, 3 तथा 5 में से प्रत्येक से विभाजित है।

(ii) 3 तथा 5 में से प्रत्येक 15 का एक गुणन खंड है।

(iii) 3 तथा 5 में से प्रत्येक का एक गुणज 15 है।

इसके अतिरिक्त यह देखा जा सकता है कि

(a) 1x12 = 12 (b) 2x6 = 12 (c) 3x4 = 12

इस प्रकार (a), (b), (c) प्रदर्शित करते हैं कि 1, 2, 3, 4, 6 तथा 12 में से प्रत्येक 12 का एक गुणनखंड है।

प्राकृत संख्याओं 1,2,3 के विषय में आप क्या सोचते हैं?

ऐसी कोई भी दो भिन्न प्राकृत संख्याएं नहीं है जिनका गुणनफल 1 हो। अतएव,

- 1 का केवल एक गुणनखंड 1 है।
- क्योंकि 1x2 = 2 तथा दूसरा संख्याओं का कोई युग्म ऐसा नहीं है जिनका गुणनफल 2 हो, अतएव, 2 के केवल दो गुणन खंड 1 तथा 2 हैं।

इसी प्रकार अनेक प्राकृत संख्याएं ऐसी हैं जिनके केवल दो गुणनखंड होते है। 3,5,7,11,13, .. ऐसी प्राकृत संख्याओं के उदाहरण हैं जिनमें से प्रत्येक के दो गुणनखंड हैं। इन संख्याओं को 'अभाज्य संख्याएं' कहा जाता है।

एक प्राकृत संख्या, जिसके केवल दो भिन्न गुणनखंड 1 तथा स्वयं संख्या हों, को अभाज्य संख्या कहा जाता है।

एक प्राकृत संख्या, यथा 4,6,8,9,10,12,15, ..., जिसके दो से अधिक गुणनखंड हों, को **संयुक्त (भाज्य) संख्या** कहा जाता है।

टिप्पणी

भाज्य (संयुक्त) संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडीकरण

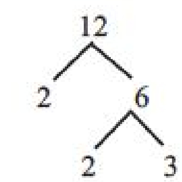
किसी संयुक्त संख्या को अभाज्य संख्याओं की गुणा के रूप में लिखना उसका अभाज्य गुणनखंडीकरण कहा जाता है। यथा

$12 = 2 \times 2 \times 3$

कार्य विधि

$$\begin{array}{c|c} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

गुणन खंड पेड़



इस प्रकार, $12 = 2 \times 2 \times 3$

अभाज्य संख्याओं से संबंधित कुछ पद

असहभाज्य (अथवा परस्पर अभाज्य) संख्याएं

दो प्राकृत संख्याएं असहभाज्य होती है यदि उनका 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो। नीचे उदाहरण दिये गए हैं :

(i) 8 तथा 27 असहभाज्य संख्याएं (यद्यपि उनमें से प्रत्येक भाज्य संख्या है)

(ii) 17 तथा 20 असहभाज्य संख्याएं हैं।

यमज अभाज्य (Twin primes) संख्याएं

ऐसी दो अभाज्य संख्याएं, जिनका अंतर 2 होता है, यमज अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं। 3 तथा 5, 5 तथा 7, 11 तथा 13, 17 तथा 19 यमज अभाज्य संख्याओं के उदाहरण हैं।

सम अभाज्य संख्या

केवल 2 ही ऐसी अभाज्य संख्या है जो सम है। यह सबसे छोटी अभाज्य संख्या भी है।

किसी परिसर के अंतर्गत अभाज्य संख्याओं को पहचानना

1 से 100 के बीच की अभाज्य संख्याओं को ज्ञात करने की प्रक्रिया नीचे दी गयी है :

टिप्पणी

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

[ईरैटोस्थीन्स की छलनी 1 ईरैटोस्थीन्स ग्रीस गणितज्ञ था।]

प्रक्रिया

(i) 2 से बड़े 2 के सभी गुणज काट दीजिए।

(ii) 3 से बड़े 3 के सभी गुणज काट दीजिए।

(iii) 5 से बड़े 5 के सभी गुणज काट दीजिए।

(iv) 7 से बड़े 7 के सभी गुणज काट दीजिए।

(1 को छोड़कर) सभी संख्याएं, जो काटी नहीं गयी, अभाज्य संख्याएं हैं। प्रक्रिया 7 पर क्यों समाप्त हो जाती है?

100 का वर्गमूल 10 है।

10 से ठीक छोटी अभाज्य संख्या 7 है। अत: प्रक्रिया 7 तक जारी रहती है। इस प्रकार 1 से 100 के बीच की अभाज्य संख्याएं हैं :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71 73, 79, 83, 89, 97.

अब अपनी प्रगति की जांच कीजिए।

E5 कौन सी प्राकृत संख्या ऐसी है जो न तो अभाज्य है और न भाज्य?

E6 पूर्ण संख्याओं में योज्य तत्समक क्या है?

E7 दो अभाज्य संख्याओं का अंतर विषम है। यदि उनका योग 15 है, तो वे दो अभाज्य संख्याएं कौन कौन सी हैं?

E8 10 तथा 30 के बीच में यमज अभाज्य संख्याओं के कितने युग्म हैं?

E9 यदि किसी भाग के प्रश्न में भाजक, भागफल तथा शेषफल क्रमश: 8, 12 तथा 5 हों, तो भाज्य क्या होगा?

टिप्पणी

5.4.2 पूर्णांकों पर संक्रियाएं

A. योग : पूर्ण संख्याओं में योग के सभी गुण जैसे (i) संवृतता का गुण (ii) क्रमविनिमेय गुण (iii) सहचारी गुण (iv) योज्य तत्समक का अस्तित्व पूर्णांकों में भी विद्यमान है।

पूर्णांकों में, जो अतिरिक्त गुण है, वह निम्नलिखित है।

(v) **योज्य प्रतिलोभ (अथवा व्युत्क्रम) का अस्तित्व :** यदि '+p' एक पूर्णांक है, तो एक ऐसा '–p' (0 को छोड़कर) अस्तित्व में होता है ताकि $+p+(-p)=0$ हो। +p तथा –p को एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम अथवा व्युत्क्रम कहा जाता है। आइए अब पूर्णांकों के योग की संक्रिया पर एक प्रक्रिया के रूप में चर्चा करें।

(a) **धन पूर्णांकों का योग :**

धन पूर्णांकों का योग उसी प्रकार से किया जाता है जैसे प्राकृत संख्याओं का योग जैसे कि $(+5)+(+3)=+8$

(b) **एक धन पूर्णांक तथा एक ऋणपूर्णांक का योग :**

यथा : $(+5)+(-3)$

हम जानते हैं कि $+5=(+1)+(+1)+(+1)+(+1)+(+1)$

इसी प्रकार, -3 को लिखा जा सकता है

$-3=(-1)+(-1)+(-1)$

अब,

$$(+5)+(-3)=(+1)+(+1)+(+1)+(+1)+(+1)+(-1)+(-1)+(-1)$$

$$=\{(+1)+(-1)\}+\{(+1)+(-1)\}+\{(+1)+(-1)\}+(+1)+(+1)$$

$$=0+0+0+(+2)$$

$$=0+(+2)=+2$$

एक लघु विधि

$(+5)+(-3)=(+2)+(+3)+(-3)$ [+5 को $(+2)+(+3)$ से बदला गया है।]

$=(+2)+\{(+3)+(-3)\}$

$=(+2)+0=+2$

एक अन्य उदाहरण

$(+4)+(-7)=(+4)+(-4)+(-3)$ [–7 को $(-4)+(-3)$ से बदला गया है।]

$=\{(+4)+(-4)\}+(-3)$

$=0+(-3)=-3$

टिप्पणी

(c) दो ऋण पूर्णांकों का योग

$(-2) + (-3) = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)$

$= -5$

B. व्यवकलन (घटाना)

पूर्णांकों में घटाने से अभिप्राय है विरोधी संख्या (अर्थात व्युत्क्रम) को जोड़ना। इस प्रकार, यदि 'p' तथा 'q' दो पूर्णांक हैं, तो $p - q = p + (-q)$ उदाहरणार्थ

(i) $(+5) - (+8) = (+5) + (-8)$

(ii) $(+4) - (-3) = (+4) + (+3)$

(iii) $(-5) - (+2) = (-5) + (-2)$

(iv) $(-7) - (-3) = (-7) + (+3)$

और योग के संदर्भ में इस उपर्युक्त परिणामों को जान चुके हैं। पूर्णांकों में व्यवकलन का एक विशेष लक्षण निम्नलिखित है:

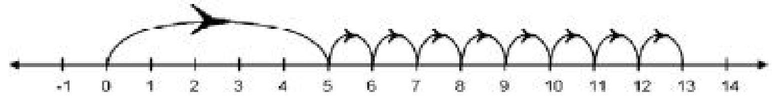
> प्राकृत संख्याओं में $p-q$ उसी दशा में अर्थपूर्ण संक्रिया है जब $q<p$ होता है। किंतु पूर्णांकों में $p-q$ अर्थ पूर्ण संक्रिया है चाहे $q < p$, $q=p$ अथवा $q>p$ हो।

संख्या-रेखाओं पर योग तथा व्यवकलन की संक्रियाएं

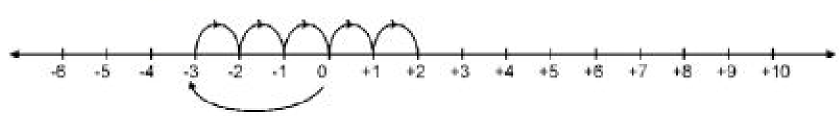
जैसा कि नीचे प्रदर्शित किया गया है, योग तथा व्यवकलन की संक्रियाओं में संख्या-रेखाओं का उपयोग किया जा सकता है:

(a) **योग** : (योग करने में हम दायीं ओर चलते हैं।)

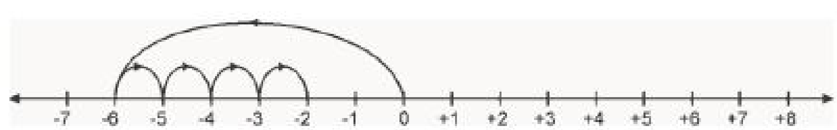
(i) $(+5) + (+8) = +13$



(ii) $(-3) + (+5) = +2$

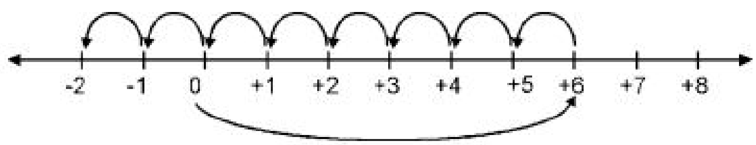


(iii) $(+4) + (-6) = (-6) + (+4) = -2$ [क्रम विनिमेय गुण द्वारा]

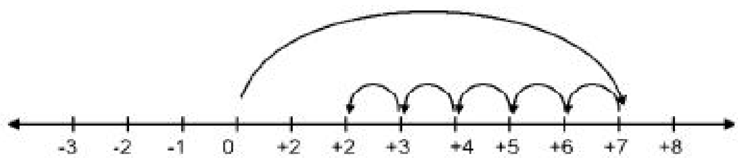


(b) **व्यवकलन :** (घटाने के लिए हम बायीं ओर चलते हैं।)

(i) (+6)–(+8) = – 2 [+6 से हम 8 अंतराल बायीं ओर गिनते हैं।]



(ii) (–5) – (–7) = –5 + 7 = 7 – 5 = +2



(c) **गुणन**

दो पूर्णांकों की गुणा एक योग होती है यदि उन में से एक पूर्णांक ऋणेतर हो। जैसे कि

(i) (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = +5x4

इस प्रकार (+5) x (+4) = + 20 [जैसा प्राकृत संख्याओं में किया था]

(ii) (–3) + (–3) + (–3) + (–3) + (–3) = (–3) x 5

इस प्रकार, –3x5 = (–3) + (–3) + (–3) + (–3) + (–3) = –15

पूर्णांकों में गुणन के लिए चिन्हों के नियम

p	*q*	*pxq*
धनात्मक p>o	धनात्मक q>o	धनात्मक pxq >o
ऋणात्मक p<o	ऋणात्मक q<o	धनात्मक pxq>o
धनात्मक p>o	ऋणात्मक q<om	ऋणात्मक pxq<o
ऋणात्मक p<o	धनात्मक q>o	ऋणात्मक pxq<o
धनात्मक p>o	शून्य q=0	शून्य pxq=0
ऋणात्मक p<o	शून्य q=o	शून्य pxq=o

टिप्पणी

पूर्णांकों में गुणन के गुण

(i) गुणन संवृत्त होता है।

(ii) गुणन क्रम विनिमेय होता है।

(iii) गुणन सहचारी होता है।

(iv) गुणात्मक तत्समक का अस्तित्व है। पूर्णांकों में गुणात्मक तत्समक 1 है।

(v) गुणन योग पर वितरित होता है।

क्रियाकलाप 1 :

मूर्त उदाहरण लेकर पूर्णांकों में गुणन के गुण सत्यापित कीजिए।

....

....

....

d. भाग

हम प्राकृत संख्याओं में भाग पर गुणन की विपरीत क्रिया के रूप में चर्चा कर चुके हैं। यहां भी ऐसी ही स्थिति है।

यदि 'p' तथा 'q' शून्येतर पूर्णांक हैं तथा pxq=r, तो हम कहते हैं

(i) $r \div p = q$

(ii) $r \div q = p$

इस प्रकार

(i) $(+5) \times (+3) = +15$

$\therefore \quad (+15) \div (+5) = +3$

तथा $(+15) \div (+3) = +5$

(ii) $(+4) \times (-6) = -24$

$(-24) \div (+4) = -6$

तथा $(-24) \div (-6) = +4$

(iii) $(-3) \times (-5) = +15$

$\therefore \quad (+15) \div (-3) = -5$

तथा $(+15) \div (-5) = -3$

टिप्पणी

पूर्णांकों में भाग के लिए चिन्हों के नियम

p	q	$p \div q$
धनात्मक p>o	धनात्मक q>0	धनात्मक $(p \div q) > 0$
धनात्मक p>o	ऋणात्मक q<0	ऋणात्मक $(p \div q) < 0$
ऋणात्मक p<o	धनात्मक q>0	ऋणात्मक $(p \div q) < 0$
ऋणात्मक p<o	ऋणात्मक q<0	धनात्मक $(p \div q) > 0$

मुख्य नोट: एक पूर्णांक का शून्य (0) से भाग निरर्थक है।

अपनी प्रगति की जांच के लिए निम्नलिखित के उत्तर दीजिए:

E10 पूर्णांकों में योज्य तत्समक क्या है?

E11 +7 का योज्य प्रतिलोम क्या है?

E12 वह कौन सा पूर्णांक है जिसे स्वयं से गुणा करने पर 1 प्राप्त होता है। ऐसे कितने पूर्णांक हैं?

E13 −8 से +8 तक के सभी पूर्णांकों का योग कितना है?

5.4.3 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएं

A. **योग**

(i) हम परिमेय संख्याओं को समहर भिन्नों में बदल कर जोड़ते हैं।

$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{9}{24}+\frac{10}{24}$ (दोनों परिमेय संख्याओं को समहर भिन्नों में बदला गया है।)

$=\frac{9+10}{24}$

$=\frac{19}{24}$

(ii) हम परिमेय संख्याओं का योग नियम $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs}$ लगा कर करते हैं।

उदाहरणार्थ,

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times5+3\times4}{3\times5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$$

नोट : $(-8) \div 4=-2, \quad 8 \div (-4)=-2$

अतः $\frac{-8}{4}=\frac{8}{-4}=-\frac{8}{4}$; इस प्रकार $\frac{-p}{q}=\frac{p}{-q}=-\frac{p}{q}$

योग के गुण

(i) परिमेय संख्याओं में योग संवृत्त होता है।

(ii) परिमेय संख्याओं में योग क्रमविनिमेय होता है।

(iii) योग सहचारी होता है

(iv) योज्य तत्समक का अस्तित्व होता है। q में योज्य तत्समक शून्य है।

(v) योज्य प्रतिलोम का अस्तित्व होता है। $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{-p}{q}$ एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम हैं।

अतएव $=\frac{p}{q}+\left(-\frac{p}{q}\right)=0$

क्रियाकलाप 2 :

परिमेय संख्याओं के उपर्युक्त योग के गुण मूर्त उदाहरणों से सत्यापित कीजिए।

....

....

....

B. व्यवकलन :

(i) हम एक परिमेय संख्या से दूसरी परिमेय संख्या का व्यवकलन उन्हें समहर भिन्नों में बदलकर करते हैं।

उदाहरण :

$$\frac{5}{8}-\frac{7}{12}=\frac{15}{24}-\frac{14}{24}$$

$$=\frac{15-14}{24}=\frac{1}{24}$$

(ii) किसी परिमेय संख्या को एक अन्य परिमेय संख्या से घटाने में हम व्यवकलन को योग में व्यक्त करने के बाद योग में दिए गए नियम का पालन करते हैं। इस प्रकार

$$\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{p}{q}+\left(\frac{-r}{s}\right)$$

$$=\frac{ps-qr}{qs}$$

जैसे कि उदाहरण के लिए

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{3}{4}+\frac{-2}{5}=\frac{3\times5+(-2)\times4}{4\times5}=\frac{15-8}{20}=\frac{7}{20}$$

C. गुणन

यदि $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएं हैं, तो

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{p\times r}{q\times s}$$

उदाहरण

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$$

(ii) $\frac{-3}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{-3\times2}{4\times7}=\frac{-6}{28}=\frac{-3}{14}$

परिमेय संख्याओं में गुणन के गुण

(i) गुणन संवृत्त है।

(ii) गुणन क्रम विनिमेय है।

टिप्पणी

(iii) गुणन सहचारी है।

(iv) गुणात्मक तत्समक का अस्तित्व है। (Q में गुणात्मक तत्समक 1 है।) (मूर्त उदाहरणों से इन गुणों को सत्यापित कीजिए।)

(v) गुणात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व होता है। तथा $\frac{q}{p}$ परस्पर **गुणात्मक प्रतिलोम हैं** क्योंकि

$$\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=1$$

$\frac{p}{q}$ तथा $\frac{q}{p}$ को एक दूसरे के **व्युत्क्रम** भी कहते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{2}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{3}{2}$ है, 5 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{5}$ है।

(vi) गुणन योग पर वितरित होता है। जैसे कि

$$\frac{p}{q}\times\left(\frac{m}{n}+\frac{k}{e}\right)=\frac{p}{q}\times\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\times\frac{k}{e}$$

उदाहरण,

$$\frac{2}{3}\left(-\frac{4}{5}+\frac{6}{7}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{-4}{5}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$$

गुणन के चिन्हों के नियम वैसे ही है जैसे पूर्णांकों में होते हैं।

क्रियाकलाप 3 :

मूर्त उदाहरणों से परिमेय संख्याओं के गुणन के उपर्युक्त (i) से (iv) गुणों को सत्यापित कीजिए।

....

....

....

D. भाग :

एक परिमेय संख्या का दूसरी से भाग, पहली संख्या का दूसरी के गुणन प्रतिलोभ से गुणा

करना होता है। अर्थात

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}$$

जैसे कि

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{-4} = \frac{14}{-12} = -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6}$$

नोट : (i) 0 से भाग निरर्थक है।

(ii) भाग के चिन्हों के नियम वैसे ही हैं जैसे पूर्णांकों में होते हैं।

परिमेय संख्याओं की दशमलव समानता

परिमेय संख्याओं, जिनके हर 10 या 10 की कोई घात हों, का निरुपण भिन्न प्रकार का होता है। नीचे उदाहरण दिए गए हैं:

$$\frac{1}{10} = 0.1,\ \frac{2}{10} = 0.2,\ \frac{7}{10} = 0.7$$

$$\frac{1}{100} = 0.01,\ \frac{2}{100} = 0.02,\ \frac{14}{100} = 0.14$$

आइए कुछ अन्य परिमेय संख्याओं को देखें।

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 125}{8 \times 125} = \frac{625}{1000} = 0.625$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

इस प्रकार, यह देखा जा सकता है कि उन परिमेय संख्याओं, जिनके हरों का 2 तथा 5 के अतिरिक्त कोई अन्य गुणन खंड नहीं है, को दशमलवों के रूप में निरुपित किया जा सकता है। ऐसे दशमलवों को सान्त दशमलव कहते हैं। $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}$, आदि के विषय में आप क्या सोचते

टिप्पणी

हैं? ऐसी स्थितियों में हर को 10 की किसी घात में नहीं बदला जा सकता चाहे उसे किसी भी संख्या से गुणा किया जाए।

अतः हम दशमलव समानता प्राप्त करने के लिए 1 को 3 से भाग देते है

$$\begin{array}{r|l} & 0.333.... \\ \hline 3 & 1.0000 \\ & 0 \\ \hline & 1.0 \\ & \;\;9 \\ \hline & \;\;10 \\ & \;\;\;9 \\ \hline & \;\;\;10 \end{array}$$

ऐसा करने में भाग का कभी अंत नहीं होगा क्योंकि प्रत्येक कदम पर शेषफल आरंभिक भाज्य के बराबर है। अतः हम लगातार 3 प्राप्त करते जाते है। इस प्रकार, हम कहते हैं :

$$\frac{1}{3} = 0.3333 \ldots$$

क्योंकि परिणाम कभी समाप्त नहीं होता तथा हमें बार बार अंक 3 प्राप्त होता रहता है, हम कहते हैं कि परिणाम एक **अनन्त आवर्ति दशमलव** है।

उपर्युक्त प्रकार के अन्य उदाहरण हैं :

0.232323.........

2.537373737..........

1.342342342...........

उपर्युक्त संख्याओं को निम्नलिखित प्रतीकात्मक रूप में भी लिखा जा सकता है :

$0.3333 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\overline{3}$

$0.232323 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\overline{23}$

$2.5373737 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2.5\overline{37}$

$1.342342342 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1.\overline{342}$

दशमलव संख्याएं **असांत अनावर्ति** भी होती हैं। नीचे उदाहरण दिये गए हैं :

0.12112111211112 ....

3.201001000100001 ...

यह देखा जा सकता है कि न तो किसी एक अंक और न ही किसी अंक-समूह की पुनरावृत्ति हुई है।

किसी असान्त तथा आवृत्ति दशमलव को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करना

उदाहरण : परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए!

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{23}$

हल : (i) आइए $0.\overline{4}$ को x लें।

$0.444 \ldots = x \ldots (1)$

$0.444 \ldots x10 = x$ x 10 (दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर)

$4.444 \ldots = 10x \ldots (2)$

(1) तथा (2) से हम प्राप्त करते हैं

$4.444 \ldots - 0.444 \ldots = 10x - x$

$\Rightarrow 4 = 9x$

$\therefore x = \frac{4}{9}$

अतएव $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

(ii) आइए $0.\overline{23}$ को x लें।

$\Rightarrow 0.232323 \ldots\ldots = x$ ...(1)

$\Rightarrow 0.232323 \ldots\ldots \times 100 = x \times 100$

$\Rightarrow 23.232323 \ldots\ldots = 100x$ ...(2)

$(2) - (1) \Rightarrow 23 = 99x$

$\Rightarrow x = \frac{23}{99}$

नोट : एक सांत तथा एक अनंत आवृति दशमलव में से प्रत्येक एक परिमेय संख्या को निरुपित करता है। किन्तु एक अनन्त अनावृति दशमलव एक परिमेय संख्या को निरुपित नहीं करता।

टिप्पणी

स्थानीय मान प्रणाली का विस्तार

10000 $= 10^4$	1000 $= 10^3$	100 $= 10^2$	10 $= 10^1$	1 $= 10^0$	.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

इस प्रकार इकाई के स्थान के दायीं ओर दसवें, सौवें, आदि स्थान आते हैं।

अतएव, $23.715 = 2x10 + 3x1 + 7x\,\frac{1}{10} + 1x\,\frac{1}{100} + 5x\,\frac{1}{1000}$

अपनी प्रगति की जांच कीजिए।

E14 (a) $\frac{2}{7}$, (b) $\frac{3}{-8}$, (c) 0 के योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

E15 दशमलव समता ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{12}{25}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{2}{7}$

E16 (a) $\frac{3}{7}$ (b) $-\frac{5}{8}$ (c) 0 के गुणन प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

E17 $0.\overline{51}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

5.5 गुणनखंड तथा गुणज

प्राकृत संख्याओं की गुणा तथा भाग के गुणों की चर्चा करते समय हमने प्राकृत संख्याओं के गुणज तथा गुणनखंडों के विषय में बात की थी। इस खण्ड में हमने सर्वनिष्ठ (सार्व) गुणनखंडों तथा गुणजों तथा वास्तविक जीवन की समस्याओं के समाधान में उनके उपयोग का संकते करते हुए उनके क्रमशः म.स. तथा ल.स. के परिकलन में प्रयोग पर चर्चा करने का प्रयास किया है।

5.5.1 सार्व गुणनखंड तथा महत्तम समापवर्तक

आइए संख्याएं 12 तथा 18 लें।

12 के गुणनखंड हैं : 1,2,3,4,6,12 ..... (a)

18 के गुणखंड हैं : 1,2,3,6,9,18 ..... (b)

(a) तथा (b) से यह देखा जा सकता है कि 1,2,3 तथा 6 दोनों सूचियों में सर्वनिष्ठ हैं।

अतएव 1,2,3 तथा 6 को 12 तथा 18 के सार्व गुणनखंड लिया जाता है। **सार्व गुणनखंडों** में सबसे बड़ा 6 है।

अतएव, 6 को 12 तथा 18 का **महत्तम समापवर्तक** (म.स.) कहा जाता है।

म.स. का निर्धारण

प्रक्रिया (i) : प्रत्येक संख्या के गुणनखंडों की सूची लिखने के उपरान्त म.स. ज्ञात किया जा सकता है। (जैसा ऊपर 12 तथा 18 के लिए किया गया था।)

प्रक्रिया (ii) : अभाज्य गुणन खंडन विधि

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$$

म.स. सबसे छोटी घात वाले दोनों संख्याओं के सार्व अभाज्य गुणन खंडों का गुणनफल होता है। अत: 12 तथा 18 का म.स. $= 2^1 \times 3^1 = 6$

प्रक्रिया (iii) : सतत भाग विधि

चरण-1 : दोनों संख्याओं में बड़ी को छोटी से भाग दिया जाता है तथा शेषफल प्राप्त किया जाता है।

चरण-2 : पहले भाग के भाजक को भाज्य बनाकर पहले भाग के शेषफल से भाग दिया जाता है।

$$\begin{array}{r|c|l} 12 & 18 & 1 \\ \hline 6 & 12 & 2 \\ & 12 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि प्राप्त शेषफल शून्य हो।

जब शेषफल शून्य हो, तो उस अंतिम भाग का भाजक वांछित म.स. होता है।

म.स. के अनुप्रयोग (शाब्दिक समस्याएं)

आइए नीचे दिये गए उदाहरण को देखें :

किसी कक्षा में 24 लड़के तथा 30 लड़कियां हैं। लड़के तथा लड़कियों की ऐसी अलग-अलग पंक्तियां तैयार करनी हैं ताकि प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या समान हो। अधिक से अधिक कितने लड़कों (अथवा लड़कियों) की पंक्तियां बनेंगी ताकि सभी विद्यार्थी समायोजित हो जाएं।

प्रत्येक पंक्ति में बच्चों (लड़कों तथा लड़कियों) की अधिक से अधिक संख्या 24 तथा 30 का म.स. होगा।

टिप्पणी

तब हम 24 तथा 30 का मस अर्थात 6 ज्ञात करते हैं। इस प्रकार हम उत्तर प्राप्त करते हैं।

5.5.2 सार्व गुणज तथा लघुतम समापवर्त्य

आइए संख्याएं 8 तथा 12 लें।

8 का गुणज वह संख्या होती है जो 8 से विभाजित होती है।

अतएव, 8 के गुणज 8x1, 8x2, 8x3, 8x4, आदि हैं।

इस प्रकार 8 के गुणज हैं : 8, 16, 24, 32, 49, 48, 56, 64, 82, ...

(यह एक अनन्त संख्याओं की सूची है।)

इसी प्रकार 12 के गुणज हैं : 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

(यह भी एक अनन्त संख्याओं की सूची है।)

अब, यह देखा जा सकता है कि 8 तथा 12 के सार्वगुणज है : 24, 48, 72, ...

सार्व गुणजों की सूची भी अनन्त है।

8 तथा 12 का सबसे छोटा सार्व गुणज (अथवा ल.स.) 24 है।

ल.स. का निर्धारण

प्रक्रिया (i) : प्रत्येक संख्या के गुणजों की सूचियां लिखकर, सार्व गुणज तथा सबसे छोटा सार्व गुणज (ल.स.) उपर्युक्त की भांति ज्ञात किया जा सकता है।

प्रक्रिया (ii) : **अभाज्य गुणन खंडन विधि :** मान लीजिए कि हम 12 तथा 18 का ल.स. ज्ञात करना चाहते हैं।

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$

जो अभाज्य संख्याएं किसी भी संख्या के अभाज्य गुणन खंडन में अधिकतम बार आती हैं, उन सब का गुणनफल ल.स. होता है।

इस प्रकार ल.स. $2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

दो संख्याओं के ल.स. तथा म.स. में संबंध

आइए निम्नलिखित उदाहरणों का ध्यानपूर्वक अवलोकन करें।

संख्याएं	*संख्याओं का गुणनफल*	*म.स.*	*ल.स.*	*म.स. तथा ल.स. का गुणनफल*
12 तथा 18	216	6	36	216

टिप्पणी

16 तथा 28	448	4	112	448
25 तथा 35	875	5	175	875

इस प्रकार हम देखते हैं कि

दो संख्याओं का गुणनफल = उनके म.स. तथा ल.स. का गुणनफल

E18 : दो असहभाज्य संख्याओं का म.स. कितना होगा?

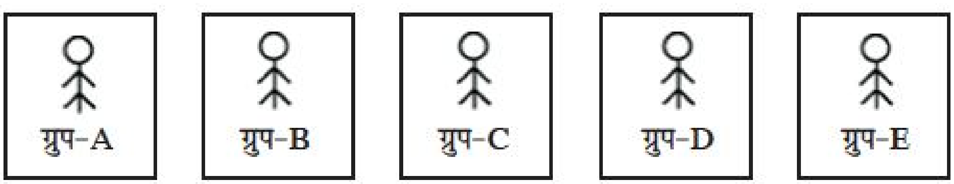
E19 : दो संख्याओं के म.स. तथा ल.स. क्रमशः 8 तथा 96 हैं। यदि उनमें से एक संख्या 24 हो, तो दूसरी क्या होगी?

5.6 अंकगणित तथा अनुप्रयोग

A. **एकिक नियम**

20 बच्चों को बराबर बच्चे वाले 5 समूहों (ग्रुपों) में विभक्त करना है। अब हम विभाजन के कार्य को संपन्न करते हैं।

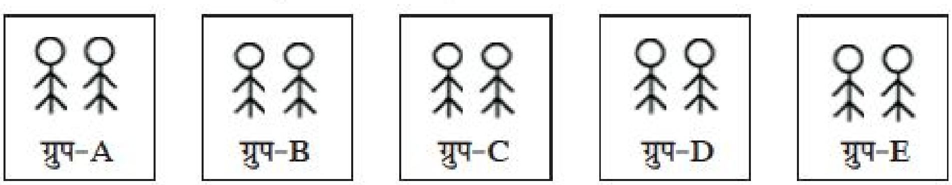
- पांच ग्रुपों के लिए पांच स्थान चिन्हित कर लिए जाते हैं तथा प्रत्येक स्थान पर एक बच्चा खड़ा किया जाता है।



20 में से 5 बच्चे चले गए।

इस प्रकार 20-5 = 15 शेष रहे।

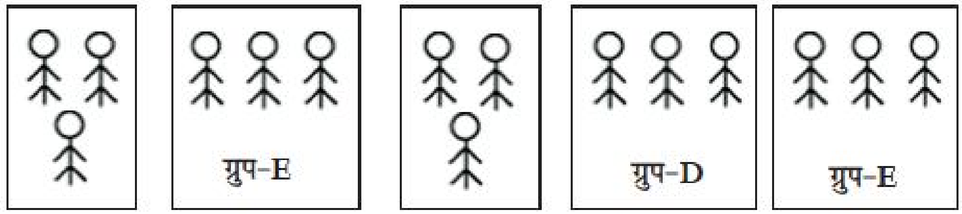
- प्रत्येक स्थान पर एक दूसरा बच्चा खड़ा किया जाता है।



शेष 15 बच्चों में से 5 और बच्चे चले गए।

इस प्रकार 15-5=10 शेष रहे।

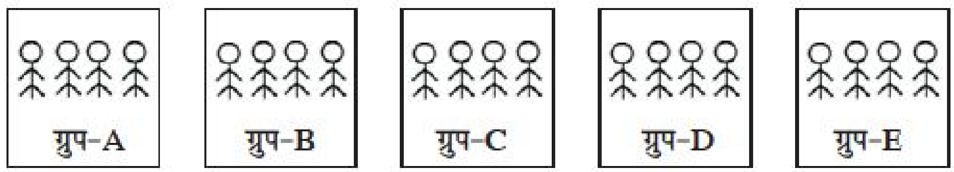
- प्रत्येक स्थान पर एक तीसरा बच्चा खड़ा किया जाता है।



शेष 10 बच्चों में 5 और बच्चे चले गए।

इस प्रकार 10-5 = 5 शेष रहे।

- प्रत्येक स्थान पर एक चौथा बच्चा खड़ा किया जाता है।



अब, 5-5 = 0 शेष रहे।

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक ग्रुप में 4 बच्चे हैं।

किन्तु हम जानते हैं कि 20 में से 5, 20 ÷ 5 बार घटाया जा सकता है।

अतः हम कहते हैं :

यदि 5 समान ग्रुपों में 20 बच्चे हों, तो एक ग्रुप में 20 ÷ 5 = 4 बच्चे होंगे।

दूसरे उदाहरण

(i) यदि समान साइज वाले 5 बरतनों में 20L दूध हो, तो एक बरतन में 20 L ÷ 5 + 4L दूध होगा।

(ii) यदि 5m पट्टी का मूल्य ₹ 20.00 हो, तो 1 m पट्टी का मूल्य ₹ 20.00 ÷ 5 = ₹ 4.00 होगा।

आइए अब हम अनेक के लिए परिकलित करें जब हमें एक के लिए दिया हो।

एक पेन का मूल्य ₹ 8.00 है। 3 पेनों का मूल्य कितना होगा?

स्पष्टतः सभी 3 पेनों का मूल्य = ₹ 8.00 + ₹ 8.00 + ₹ 8.00 किन्तु हम जानते हैं कि 8+8+8 = 8 x 3

∴ हम कह सकते हैं कि 3 पेनों का मूल्य = ₹ 8.00 x 3 इस प्रकार हम जान सके कि

यदि 1 पेन का मूल्य ₹ 8.00 हो, तो 3 पेनों का मूल्य = ₹ 8.00 x 3 = ₹ 24.00

अन्य इस प्रकार के उदाहरण हैं–

(iii) यदि नमक के एक पैकट का भार 600 ग्रा है, तो नमक के 4 पैकटों का भार 600 ग्रा x 4 = 2400 ग्रा = 2.400 किग्रा

(iv) यदि तेल के एक मर्तबान में 12L तेल है, तो 5 मर्तबानों में 12Lx5 = 60L तेल होगा।

आइए उपर्युक्त चर्चा किये गए उदाहरणों का विश्लेषण करें।

उदाहरण	*पहली चर राशि*	*दूसरी चर राशि*
(i)	बरतनों की संख्या	धारिता
(ii)	लम्बाई	मूल्य
(iii)	पैकटों की संख्या	भार
(iv)	मर्तबानों की संख्या	धारिता

उपर्युक्त प्रत्येक उदाहरण में 'जितने गुना' पहली चर राशि है, 'उतने गुना' दूसरी चर राशि है। जैसे कि

बरतनों की संख्या दुगुनी है; तो उनकी धारिता दुगनी होगी;

लम्बाई 3 गुनी है, तो मूल्य 3 गुना होगा; इत्यादि

इस प्रकार,

(i) जब हमें अनेक के लिए ज्ञात होता है और एक के लिए परिकलित करना होता है, तो हम भाग देते हैं।

(ii) जब हमें एक के लिए ज्ञात होता है तथा अनेक के लिए परिकलित करना होता है, तो हम गुणा करते हैं।

ऐसे चर राशियों के युग्मों, जिनमें 'जितने गुना एक होती है, 'उतने गुना' दूसरी होती है, को **'अनुलोम विचरण'** वाले युग्म कहा जाता हैं।

प्रतिलोम विचरण वाली चर राशियां

आइए निम्नलिखित स्थितियों पर विचार करें :

3 कामगार किसी कार्य को 5 दिन में पूरा करते हैं।

यदि 1 कामगार अकेला उस कार्य को करे, तो उसे उस कार्य को पूरा करने में कितने दिन लगेंगे?

हमारा अनुभव बताता है कि वह इसे 5+5+5 = 5x3 दिन में पूरा कर सकता है।

टिप्पणी

अतएव, यह देखा गया है कि

यदि 3 कामगार किसी कार्य को 5 दिन में पूरा करें, तो 1 कामगार उसे $5x3 = 15$ दिन में पूरा करता है। इसी प्रकार के अन्य उदाहरण नीचे दिये जा रहे हैं :

(i) यदि 8 व्यक्ति भोजन की किसी मात्रा को 5 दिन में समाप्त करते हैं तब 1 व्यक्ति भोजन की उसी मात्रा को $8x5=40$ दिन में समाप्त करेगा।

(ii) यदि 1 व्यक्ति किसी कार्य को 24 दिन में पूरा करता है, तो 3 व्यक्ति उस कार्य को $24 \div 3 = 8$ दिन में पूरा करेंगे।

(iii) यदि 1 व्यक्ति भोजन के किसी भण्डार को 30 दिन में समाप्त करता है, तो 5 व्यक्ति उस भण्डार को $30 \div 5 = 6$ दिन में समाप्त करेंगे।

उपर्युक्त उदाहरणों में चर राशियां हैं :

व्यक्तियों की संख्या	*कार्य करने के लिए वाँछित समय*
भोजन के किसी भण्डार को समाप्त करने के लिए व्यक्तियों की संख्या	समाप्त करने में लिया जाने वाला समय

जैसे हमने देखा है :

यदि प्रथम चर राशि दुगुनी की जाए, तो दूसरी आधी हो जाती है।

यदि प्रथम चर राशि एक चौथाई होती है, तो दूसरी 4 गुनी होती है

चर राशियों के उपर्युक्त युग्म, परस्पर **प्रतिलोम विचरण** वाले युग्म कहे जाते हैं।

काम तथा समय में एकिक नियम का अनुप्रयोग

आइए नीचे दिए गए उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण: A किसी कार्य को 24 दिन तथा B उसी कार्य को 18 दिन में पूरा कर सकता है। A तथा B ने मिलकर कार्य करना आरंभ किया 14 दिन के बाद A ने कार्य छोड़ दिया। कार्य को पूरा होने में कितने दिन का समय लगेगा?

हल : A 24 दिन में पूरा कार्य कर सकता है।

$\therefore$ A का 1 दिन का कार्य $= \dfrac{1}{24}$

B 18 दिन में पूरा कार्य कर सकता है।

$\therefore$ B का 1 दिन का कार्य $= \dfrac{1}{18}$

टिप्पणी

A तथा B द्वारा मिलकर किया गया 1 दिन का कार्य = $\frac{1}{24}+\frac{1}{18}=\frac{3+4}{72}=\frac{7}{72}$

A तथा B द्वारा मिलकर किया गया 4 दिन का कार्य = $4\times\frac{7}{72}=\frac{7}{18}$

शेष कार्य जो पूरा किया जाना है = $1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$

B द्वारा 1 दिन में किया जाने वाला कार्य = $\frac{1}{18}$

$\frac{11}{18}$ कार्य को पूरा करने के लिए B द्वारा लिया जाने वाला समय (दिनों में) =

$\frac{11}{18}\div\frac{1}{18}=\frac{11}{18}\times\frac{18}{1}=11$

अत: कुल लगने वाला समय = (11+4) दिन = 15 दिन

एकिक नियम द्वारा परिकलन में निम्नलिखित व्यापकीकरण किये जाने की आवश्यकता है :

(i) इकाई समय में किया गया कार्य = $\dfrac{\text{किया गया कार्य}}{\text{कार्य करने में लिया गया समय}}$

(ii) वांछित समय = $\dfrac{\text{किया जाने वाला कार्य}}{\text{इकाई समय में किया गया कार्य}}$

B. प्रतिशतता का परिकलन

पद ''प्रतिशतता' से अभिप्राय

''प्रतिशत'' से अभिप्राय है ''सौ में से''। किन्तु इसका उपयोग कब किया जाता है? आइए नीचे दी गयी स्थिति को समझें।

A तथा B दो विद्यार्थी हैं। A अधिकतम अंक 80 वाली परीक्षा में बैठा तथा उसने 64 अंक प्राप्त किए। B किसी अन्य अधिकतम अंक 75 वाली परीक्षा में बैठा तथा उसने 63 अंक प्राप्त किए।

किसका प्रदर्शन अधिक अच्छा है, 80 अंकों में से 64 प्राप्त करना अथवा 75 अंकों में से 63 प्राप्त करना। यदि दोनों परीक्षाओं के अधिकतम अंक समान होते, तो हम अंकों की तुलना आसानी से कर सकते थे।

अत: हम कुल (अधिकतम) 100 अंक पर विचार करते हैं।

A कुल 80 अंकों में से 64 अंक प्राप्त करता है।

$\therefore$ A कुल 100 अंकों में से $\frac{64}{80} \times 100$ अंक = 80 अंक प्राप्त करता है।

अब हम कहते हैं कि A के 100 अंकों में से 80 अंक अर्थात 80 प्रतिशत अंक अथवा 80% अंक हैं।

इसी प्रकार B 75 अंकों में से 63 अंक प्राप्त करता है

$\therefore$ B 100 अंकों में से $\frac{63}{75} \times 100$ अंक = 84 अर्थात अंक प्राप्त करता है।

अब हम कहते हैं कि B के 100 अंकों में से 84 अंक अर्थात 84 प्रतिशत अंक अथवा 84% अंक हैं।

$\therefore$ B का प्रदर्शन A की तुलना में अधिक अच्छा है।

इस प्रकार हम जानते हैं–

- प्रतिशतता एक संख्या की दूसरी से तुलना होती है।
- तुलना करते समय हम दूसरी संख्या को 100 लेते हैं।
- p की q से तुलना करते समय हम प्राप्त करते हैं $\frac{p}{q} \times 100\%$

प्रतिशतता का अनुप्रयोग

निम्नलिखित अवसरों पर हम प्रतिशतता का अनुप्रयोग करते हैं।

- किसी व्यापार में लाभ अथवा हानि को क्रयमूल्य की प्रतिशतता के रूप में व्यक्त किया जाता है। 'लाभ 12% है' से अभिप्राय है लाभ क्रयमूल्य का 12% है।
- ऋण की स्थिति में देय ब्याज को मूलधन के प्रतिशत के रूप में व्यक्ति किया जाता है। 'ब्याज की दर 10% है' से अभिप्राय है एक वर्ष में ब्याज मूलधन के 10% के बराबर है।
- वृद्धि अथवा कमी (उपज में) की स्थिति में वृद्धि अथवा कमी को प्रारंभिक (उपज) के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

(a) लाभ तथा हानि

किसी व्यापार में

लाभ = विक्रयमूल्य – क्रयमूल्य (वि.मू. > क्र.मू.)

हानि = क्रयमूल्य – विक्रय मूल्य (क्र.मू. > वि.मू.)

लाभ% = लाभ क्रय मूल्य के प्रतिशत के रूप में

$$= \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$= \frac{\text{वि.मू.} - \text{क्र.मू.}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

हानि % = हानि क्रयमूल्य के प्रतिशत के रूप में

$$= \frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$= \frac{\text{क्र.मू.} - \text{वि.मू.}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

नोट : यदि किसी वस्तु को खरीदने के बाद, कुछ धन उस वस्तु को वहन करने (ढोनें) अथवा किसी अन्य उद्देश्य के लिए व्यय किया जाता है, तो वास्तविक क्रयमूल्य = क्रय मूल्य + अन्य व्यय होता है। लाभ अथवा हानि के परिकलन में क्रयमूल्य के स्थान पर वास्तविक क्रयमूल्य लिया जाता है।

वि.मू. अथवा क्र.मू. के परिकलन की सुगमता के लिए निम्नलिखित नियमों का उपयोग किया जा सकता है।

$$\frac{\text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ \%}} = \frac{\text{क्र.मू.}}{100}$$

$$\frac{\text{वि.मू.}}{100 - \text{हानि \%}} = \frac{\text{क्र.मू.}}{100}$$

(b) ब्याज का परिकलन

हम धन की बचत करके बैंक में रखते है, हम बैंक से धन उधार भी लेते हैं। जब हम धन की बचत करते हैं, तो हमें बैंक से ब्याज मिलता है। जब हम बैंक से धन उधार लेते हैं, तो हम बैंक को ब्याज का भुगतान करते हैं।

टिप्पणी

ब्याज कैसे परिकलित किया जाता है?

बैंक के साथ लेन-देन में, बैंक ब्याज की दर घोषित करता है।

हम निर्णय करते हैं :–

(i) हमें कितना धन उधार लेना (अथवा जमा करना) है।

(ii) हमें कितने समय के लिए उधार लेना (अथवा जमा करना) है।

मान लीजिए कि उधार लिया गया धन P है तथा इसे 't' वर्ष के लिए उधार लिया गया है।

बैंक द्वारा घोषित ब्याज की दर r% है।

उधार की अवधि के अंत में कितना ब्याज देना होगा?

कुल कितना धन बैंक को वापस करना होगा?

परिकलन

ब्याज की दर r% है। अर्थात्

मूलधन 100 पर एक वर्ष का ब्याज r है।

मूलधन 1 पर एक वर्ष का ब्याज $= \dfrac{r}{100}$

मूलधन p पर एक वर्ष का ब्याज $= \dfrac{r}{100} \times P = \dfrac{Pr}{100}$

मूलधन p पर t वर्ष का ब्याज $= \dfrac{Pr}{100} \times t = \dfrac{Prt}{100}$

इस प्रकार, $\boxed{\text{ब्याज (I)} = \dfrac{Prt}{100}}$ नियम 1 [I.P.t.r–नियम]

उधार की अवधि के अंत में बैंक को लौटाया जाने वाला कुल धन है,

मिश्रधन $(A) = P + I$

$$\Rightarrow A = P + \frac{Prt}{100}$$

अर्थात् $\boxed{A = P\left(1 + \dfrac{rt}{100}\right)}$ नियम II [A,P.t.r.–नियम]

नियम 1 का अनुप्रयोग

- P.t,r दिये है, I ज्ञात करना
- P,r,I दिये हैं, t ज्ञात करना
- P,I,t दिये हैं, r ज्ञात करना
- I,t,r दिये हैं, P ज्ञात करना

नियम II का अनुप्रयोग

- P,t,r दिये गए हैं, A परिकलित करना
- P,r,A दिये गए हैं, t परिकलित करना
- P,t,A दिये गए हैं, r परिकलित करना
- A,t,r दिये गए हैं, P परिकलित करना

अपनी प्रगति की जांच कीजिए :

E20 गणित की एक पाठय पुस्तक का मूल्य साहित्य की एक पाठय पुस्तक के मूल्य से 2 रुपये अधिक है। यदि 5 साहित्य की पुस्तकों का मूल्य गणित की 3 पुस्तकों से ₹ 38 अधिक हो, तो साहित्य की प्रत्येक पुस्तक का मूल्य क्या है?

E21 तीन व्यक्तियों ने मिलकर किसी कार्य के आधे को 8 दिन में पूरा किया। यदि उन में से एक कार्य को करना छोड़ दे तो शेष आधा कार्य कितने दिनों में पूरा होगा?

E22 गोपाल ने साधारण ब्याज की 12% दर पर कुछ धन उधान लिया। यदि उसे 5 वर्ष के अंत में उधार-ऋण समाप्त करने के लिए ₹ 1280 लौटाने पड़े हों, तो उसने कितनी धन राशि उधार ली थी?

5.7 सारांश

- प्राथमिक विद्यालय स्तर पर गणित पाठ्यक्रम में सम्मिलित चार प्रकार के संख्या निकाय हैं :
  - प्राकृत संख्याएं (N) : 1,2,3,4, ...
  - पूर्ण संख्याएं (W) : 0,1,2,3, ...
  - पूर्णांक (Z) : .... –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, ...
  - परिमेय संख्याएं (Q) : $\frac{p}{q}$ के रूप वाली संख्याएं जहां, p,q पूर्णांक हैं तथा q ≠ o परिमेय संख्याएं होती हैं।

- भिन्न-भिन्न संख्या समूहों में योग के विभिन्न गुण हैं :
  - (i) योग N, W, Z तथा Q में संवृत्त होता है।
  - (ii) N, W, Z तथा Q में योग क्रम विनिमेय तथा सहचारी होता है।
  - (iii) W, Z तथा Q में योज्य तत्समक का अस्तित्व होता है। 0 योज्य तत्समक है।
  - (iv) Z तथा Q में योज्य प्रतिलोभ का अस्तित्व होता है।
- भिन्न-भिन्न संख्या समूहों में गुणन के विभिन्न गुण हैं :
  - (i) N, W, Z तथा Q में गुणन संवृत्त होता है।
  - (ii) N, W, Z तथा Q में गुणन क्रमविनिमेय होता है।
  - (iii) N, W, Z तथा Q में गुणन सहचारी होता है।
  - (iv) N, W, Z तथा Q में गुणन तत्समक का अस्तित्व होता है।
  - (v) Q में गुणन प्रतिलोम का अस्तित्व होता है।
  - (vi) N, W, Z तथा Q में गुणन योग पर वितरित होता है।
- किसी परिमेय संख्या को (i) सान्त दशमलव के रूप में निरुपित किया जा सकता है यदि हर का 2 तथा 5 के अतिरिक्त अन्य कोई गुणनखंड न हो। (ii) अनन्त आवृत्ति दशमलव के रूप में निरुपित किया जा सकता है यदि हर का 2 तथा 5 के अतिरिक्त अन्य गुणनखंड भी है।
- दो अथवा अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने के लिए अभाज्य सार्व गुणनखंडों का प्रयोग किया जा सकता है। इसी प्रकार दो अथवा अधिक प्राकृत संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करने के लिए सार्व गुणजों का प्रयोग किया जा सकता है।

5.8 आपकी प्रगति की जांच के लिए उत्तर

E1 सबसे छोटी गणन संख्या 1 है।

E2 0

E3 (i) 0 (ii) 72 (iii) 792

E4 (a) सत्य (b) असत्य (c) असत्य (d) असत्य (e) सत्य

E5 1 **E6** 0 **E7** 2 तथा 13 **E8** 2 **E9** 101 **E10** 0

E11 –7 **E12** –1 तथा +1 **E13** 0 **E14** (a) $-\frac{2}{7}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) 0

E15 (i) 0.48 (ii) 0.875 (iii) 0.285714

E16 (a) $\frac{7}{3}$ (b) $\frac{-8}{5}$ (c) अस्तित्व नहीं है।

E17 $\frac{51}{99}$ **E18** 1 **E19** 32 **E20** ₹ 22

E21 12 दिन **E22** ₹ 800

5.9 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा तैयार की गयी तथा छापी गयी कक्षा VI, VII तथा VIII के लिए गणित की पाठय पुस्तकें

5.10 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1. −30 तथा +30 के बीच कितने पूर्णांक 3 के गुणज हैं?

2. योग कितना है?

   (i) 1–2+3–4+5–6 .... +45

   (ii) 1+2–3+4+5–6+7+8–9+ .... –48

3. नीचे दी गयी तालिका से भाज्य संख्याएं हटाइए तथा 20 तथा 69 के बीच आने वाली अभाज्य संख्याओं की पहचान कीजिए। यमज अभाज्य संख्याओं के कितने युग्म उनमें सम्मिलित हैं?

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69

4. A ने 200 किग्रा चावल ₹ 18 प्रति किग्रा के भाव से खरीदे तथा उनमें से 150 किग्रा ₹ 22 प्रतिकिग्रा तथा शेष ₹ 19 प्रति किग्रा के भाव पर बेचे। B ने 250 किग्रा चावल ₹ 20 प्रति किग्रा के भाव से खरीदे तथा सबको ₹ 23 प्रति किग्रा के भाव पर बेच दिए। ज्ञात कीजिए किसको अधिक लाभ हुआ।

5. P ने एक बैंक से 8% साधारण ब्याज की दर पर ₹ 80,000.00 की धन राशि उधार ली। 3 वर्ष के पश्चात अपने ऋण को पूरी तरह समाप्त करने के लिए उसे कितना भुगतान करना पड़ेगा?

टिप्पणी

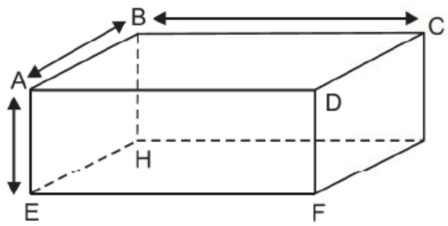
इकाई-6 आकृतियाँ और स्थानिक संबंध

संरचना

6.0 प्रस्तावना

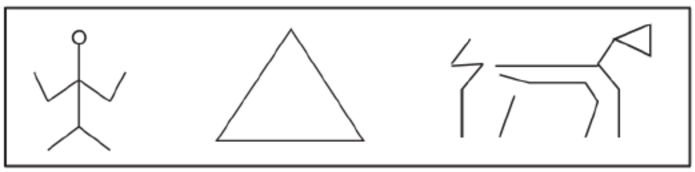
जब हम अपने चारों ओर देखते है, हमें कई वस्तुएं दिखाई देती है। कुछ हमें नियमित आकृति के रूप में दिखाई देती है जैसे पेड़ पर लटका हुआ अमरुद, पेड़ पर नींबू। कुछ वस्तुएं हमें ऐसी दिखाई देती है जिनकी आकृति नियमित नहीं है जैसे पत्थर का एक टूटा हुआ टुकड़ा।

टिप्पणी



आकृति 6.1

आओ एक ईंट लेते है। इसका फैलाव 3 दिशाओं में है और इसलिए यह 3 भुजाओं वाली वस्तु है। इन्हें 3-D वस्तुएं भी कहते हैं। इसमें 6 सतह, 12 किनारे, 8 शीर्ष हैं। एक दीवार, एक फर्श, एक मेज का ऊपरी भाग एक तल को प्रदर्शित करते है। एक बर्तन में पानी की सतह सदैव क्षैतिज तल को व्यक्त करती है। एक दीवार पर या छत पर, हम नीचे दिए अनुसार विभिन्न आकृतियां और चित्र बना सकते है।



आकृति 6.2 तल पर आकृतियां

इस द्विविमीय तल–सतह को बायें और दायें, ऊपर व नीचे की ओर विस्तारित किया जा सकता है। उपरोक्त चित्र में जो आकृतियां दिखाई है, द्विविमिय (2-D आकृति) है। इस इकाई में 2-D और 3-D आकृतियों के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे।

इस इकाई को पूर्ण करने के लिए कम से कम 10 घंटों के अध्ययन की आवश्यकता है।

6.1 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप सक्षम होंगे :

- मूल ज्यामितीय आकृतियां जैसे, बिंदु, रेखा, किरण व कोण को पहचानना
- तल पर खींची गई विभिन्न प्रकार की ज्यामितिय आकृतियों की पहचानना
- दो आकृतियां में सर्वागसमता व समरुपता की शर्तो की व्याख्या
- किसी आकृति में छाया व घूर्णनात्मक सममिति की पहचान
- त्रिविमीय आकृतियां की पहचान व उनके गुण

टिप्पणी

6.2 मूल ज्यामितीय आकृतियां

6.2.1 अपरिभाषित पद

गणितीय प्रकरण को जानने के लिए यह अति आवश्यक है कि उससे संबंधित निश्चित पदों को हम जानें। किसी पद का ज्ञान उसकी परिभाषा से ही निकलता है। लेकिन एक पद को परिभाषित करने के लिए परिभाषा में प्रयोग की गई अन्य पदों की जानकारी भी आवश्यक है। जब हम प्रकरण के साथ शुरू करते है तो प्रकरण के संदर्भ में हमारे पास शब्दों का भण्डार नहीं होता है।

इसलिए प्राय: प्रकरण से संबंधित मूल पदों को परिभाषित करना संभव नहीं होता है। ऐसे पदों को परिभाषित पद कहा जाता है।

ज्यामितीय में कुछ अपरिभाषित पद इस प्रकार है–बिंदु, रेखा, तल (इन पदों को परिभाषित करने के लिए इन पदों पर आते है।)

चूंकि उपरोक्त पदों की कोई परिभाषा नहीं दी गई है जिससे पदों को सही तरह से प्रयोग किया जा सके, नीचे कुछ अभिगृहित दिए जा रहे है–

ज्यामितीय के मूल Axioms अभिगृहित

I. प्रत्येक रेखा (सरल रेखा) और तल बिंदुओं का समुच्चय है।

II. एक बिंदु से गुजरने वाली अंसख्य रेखाएं खींची जा सकती है।

III. दो भिन्न बिंदुओं को मिलाने गली केवल एक रेखा खींची जा सकती है।

IV. एक तल में दो बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा भी उसी तरह में होती हैं।

V. तीन ऐसे बिंदु जो रेखा पर नहीं है एक तल में स्थित होते हैं।

VI. यदि दो तल एक दूसरे को काटते हैं तो उनका कटाव एक सरल रेखा होता है।

उपरोक्त स्वयं सिद्ध हमें तीन अपरिभाषित पदों के अंत: संबंधों की व्याख्या के बारे में दिशा प्रदान करते है।

6.2.2 मूल आकृतियां

बिंदु : एक पेन या पेन्सिल की सहायता से एक कागज पर एक चिह्न लगाया जाता है, बिंदु कहलाता है। हमें मस्तिष्क में इसके आकार के बारे में कोई प्रत्यय नहीं रखना चाहिए।

रेखा : जब हम रेखा के बारे में बात करते है इसका मतलब है। सरल रेखा।

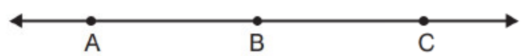
आकृति 6.3

उपरोक्त आकृति सरल रेखा को प्रदर्शित करता है। उसे एक सीधा किनारे की सहायता से खींचा जाता है। दोनों तरफ दो तीर के निशान दोनों दिशाओं में असीमित रूप से विस्तार को संकेत करता है।

समतल : एक कमरे का फर्श दीवार की सतह, एक किताब का पृष्ठ समतल के प्रदर्शित करता है। एक समतल का विस्तार असीमित होता है।

दो बिंदुओं के बीच दूरी : यदि A और B दो बिंदु है तो इन दोनों बिंदुओं के बीच की दूरी एक अद्वितीय धनात्मक वास्तविक संख्या होती है। और इसे संकेत AB से प्रदर्शित करते है।

Betweeness (परिभाषा) : यदि A, B और C तीन भिन्न बिंदु है जो कि सीधी रेखा AB + BC = AC पर स्थित है, ऐसी स्थिति में बिंदु A और C के बीच में स्थित कहा जाता है और इसे संकेत रूप में A–B–C या C–B–A लिखा जाता है।



चित्र 6.4

$\overline{AB}$

उपरोक्त आरेख 3 बिंदुओं को प्रदर्शित करता है जबकि A-B-C (अर्थात B, A और C के मध्य स्थित है)

रेखाखंड (परिभाषा) **:** दो भिन्न बिंदुओं A, B और उनके बीच के बिंदुओं के समूह को रेखाखंड कहते है और बिंदु A, B के द्वारा निर्धारित होता है। इसे $\overline{AB}$ के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

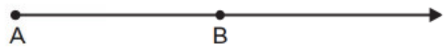
A और B को रेखाखंड का अंत बिंदु कहते हैं।

एक रेखाखंड सदैव एक रेखा का भाग होता है और इसके दो अंत बिंदु होते है।

रेखाखंड की लम्बाई (परिभाषा) : रेखाखंड के दोनों अंत बिंदुओं के बीच की दूरी को रेखाखंड की लम्बाई कहते है। इस प्रकार की लम्बाई AB है।

किरण (परिभाषा) : किरण रेखा का एक भाग होता है। यह एक बिंदु से प्रारम्भ होती है (जिसे प्रारंभिक बिंदु कहते है) और एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होती है। चित्र 6.5 में एक रेखा बिंदु A से प्रारम्भ होती है और B दिशा में असीमित रूप से विस्तृत होती है इस चित्र में किरण को के रूप में प्रदर्शित किया गया है और इसे किरण AB पढ़ते है। अक्षर AB के ऊपर तीर का निशान किरण को प्रदर्शित करता है। और तीर की दिशा यह प्रदर्शित करता है कि किरण बिंदु A से प्रारम्भ हो रहा है।

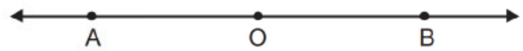
टिप्पणी



चित्र 6.5

बिंदु A को का शीर्ष या प्रारंभिक बिंदु कहते है।

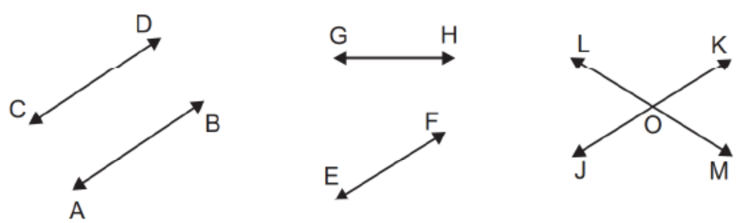
विपरीत किरण :



चित्र 6.6

चित्र 6.6 रेखाखंड है और दो और किरण है जो कि के भाग है O दोनों किरणों और का उभयनिष्ट बिंदु है, ऐसे स्थिति में और को विपरीत किरणें कहते है। स्पष्ट है विपरीत किरणें एक रेखा का निर्माण करते है।

रेखायुग्म : तीन रेखा युग्मों को निम्नांकित चित्र में प्रदर्शित किया गया है।



(I) (II) (III)

चित्र 6.7

रेखायें और चित्र चित्र 6.7 (i) में दिखाया गया है, इस प्रकार से है जो दोनों दिशाओं में विस्तार करने पर कभी नहीं मिलेंगे। ऐसे रेखायें जिनमें कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होता उनको समानान्तर रेखाएं कहते है।

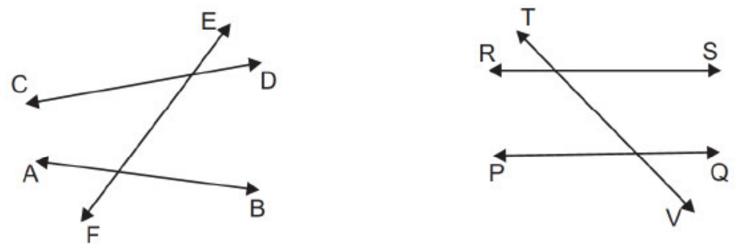
चित्र 6.7 (ii) दो रेखाएं और $\overleftrightarrow{GH}$ दिखाया गया है यदि $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ को F और H दिशाओं में क्रमशः विस्तार करने पर एक उभयनिष्ठ बिंदु पर मिलेंगे।

चित्र 6.7 (iii) में रेखाओं $\overleftrightarrow{JK}$ और $\overleftrightarrow{LM}$ में बिंदु O उभयनिष्ठ है। इस प्रकार रेखा $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ चित्र 6.7 (ii) और रेखायुग्म $\overleftrightarrow{JK}$ और $\overleftrightarrow{LM}$ चित्र 6.7 (iii) को असमांतर रेखायें या प्रतिच्छेदी रेखाएं कहते है।

चित्र 6.7 (iii) में बिंदु O को रेखायें $\overleftrightarrow{JK}$ और $\overleftrightarrow{LM}$ का प्रतिच्छेदक बिंदु कहते है। चित्र 6.7 (ii) में रेखाओं $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ के प्रतिच्छेदक बिंदु को रेखाओं $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ को क्रमशः F और H दिशा में विस्तार करके प्राप्त किया जा सकता है।

समांतर रेखाओं का सांकेतिक Representation : दो समांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को सांकेकितक रूप से $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ लिखते है।

युग्म रेखाओं का तिर्यक छेदी रेखा



(i) (i)

चित्र 6.8

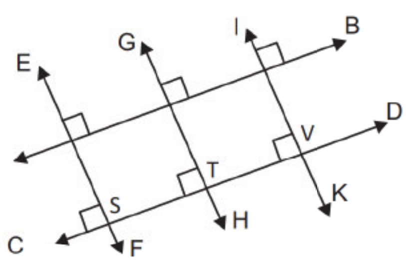
चित्र 6.8 (i) में दो असमांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दिखाया गया है और चित्र 6.8 (ii) में दो समांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ को दिखाया गया है। चित्र 6.8 (i) में रेखा $\overleftrightarrow{EF}$ दोनों असमांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को प्रतिच्छेद कर रहा है। उसी प्रकार चित्र 6.8 (ii) में रेखा $\overleftrightarrow{TV}$ समांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ को प्रतिच्छेद कर रहा है। चित्र 6.8 (i) में रेखा $\overleftrightarrow{EF}$ और चित्र 6.8 (ii) में रेखा $\overleftrightarrow{TV}$ को तिर्यक छेदी रेखा कहते है।

$\overleftrightarrow{AB}$

एक ऐसी रेखा जो दो अथवा अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है तिर्यक छेदी रेखा (Transversal) कहलाती है।

समांतर रेखाओं के गुण :

आकृति 6.9 में दो समांतर रेखाओं को $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ तीन तिर्यक रेखायें प्रतिच्छेद कर रही है और रेखा पर समकोण बना रही है।



आकृति 6.9

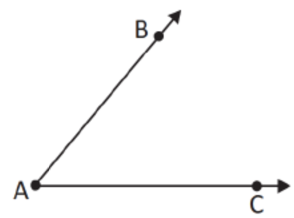
P, Q, R बिंदुओं पर तिर्यक रेखायें रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ को काट रही है और S, T, V बिंदुओं पर तिर्यक रेखायें रेखा $\overleftrightarrow{CD}$ को काट रही है। $\overline{PS}$, $\overline{QT}$ और $\overline{RV}$ की लम्बाई बराबर है।

टिप्पणी

PS, QT और RV दोनों समांतर रेखाओं की बीच की दूरी को दर्शाता है और इसे वास्तविक आरेखन के द्वारा जांच की सकती है कि PS = QT = RV इस प्रकार हम देखते है कि दो समांतर रेखओं के बीच की दूरी हर जगह समान होता है। अत दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी स्थिर होती है।

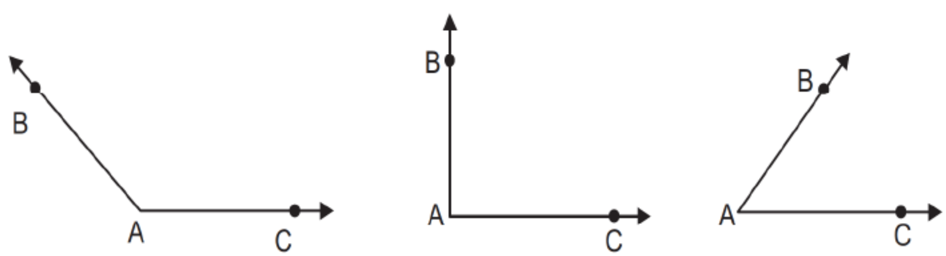
कोण (परिभाषा) : यदि A, B और C तीन अरेखीय बिंदु है तब किरणें $\overrightarrow{AB}$ और द्वारा बनाये गये आकृति को कोण BAC कहा जाता है। (उसे लिखते है)

और , के भुजाएं कहलाती है। और A को कोण का शीर्ष कहते हैं।



आकृति 6.10

बिंदुओं A, B, C की स्थितियों के आधार पर कोण के विभिन्न आकार हो सकते हैं। (निम्नांकित आकृति को देखें)

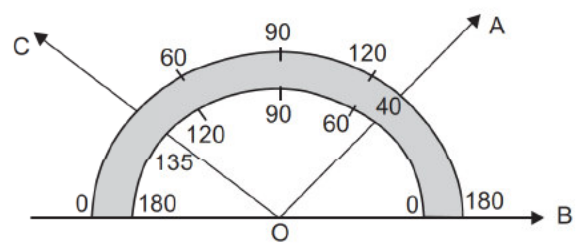


आकृति 6.11

कोण की माप : आपके ज्यामितीय बाक्स में आपको चांदा बना बनाया मिल जायेगा। इस चांदा की सहायता से हम कोण का मापन कर सकते है और कोण मापन की इकाई को डिग्री (Degree) कहते है।

संलग्न आकृति में

40° की तथा 135° की माप प्रदर्शित करता है।

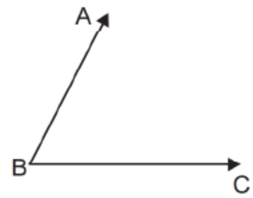


आकृति 6.12

टिप्पणी

की माप को से प्रदर्शित किया जाता है।

यदि आकृति 6.13 में की माप 70° है तो हम उसे = 70° लिखते है।



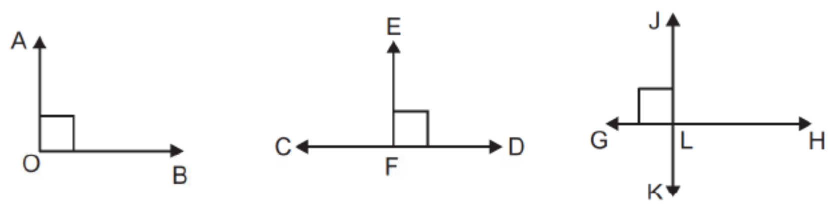
आकृति 6.13

अभिगृहीत : प्रत्येक कोण के साथ एक वास्तविक संख्या 0 से अधिक और 180 से कम जुड़ा होता है।

इस संख्या को कोण की माप C डिग्री में कहते है।

लम्बवत रेखाएं :

[illegible] $= 90^\circ$ $m\angle PAC$

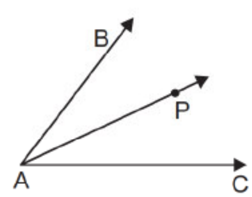


(i) (ii) (iii)

आकृति 6.14

आकृति 6.14 (i) में है ऐसी स्थिति में किरणे और $\overrightarrow{OB}$ एक दूसरे पर लम्बवत कहलाते है और इसे $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ या $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OA}$ लिखते है।

आकृति 6.14 (ii) में $m\angle CFE = 90^\circ$ है अत: हम लिख सकते है आकृति 6.14 (iii) में $m\angle GLJ = 90^\circ$ है अत: या $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{JK}$



आकृति 6.15

समद्विभाजक कोण : यदि $\angle BAC$ में एक आंतरिक बिंदु P है और तब को $\angle BAC$ का समद्विभाजक कहते हैं। (आकृति 6.15)

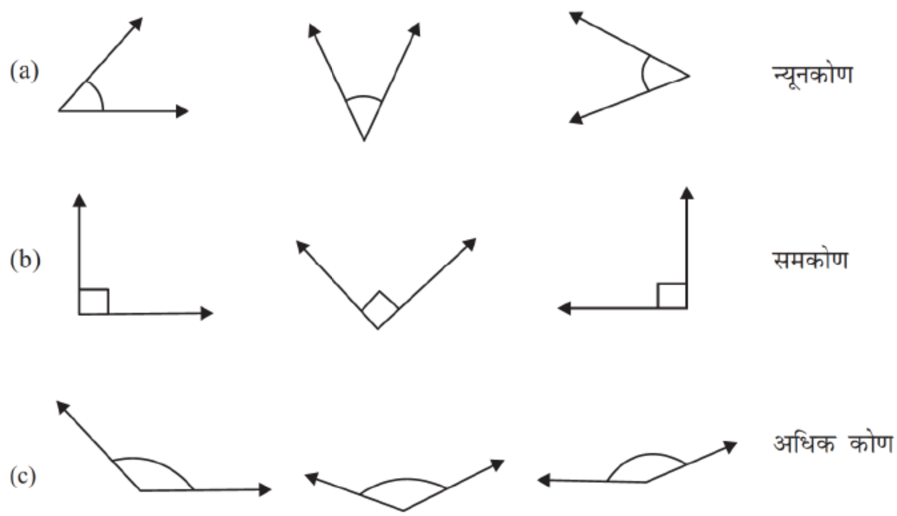
टिप्पणी

कोणों का वर्गीकरण : मापन के दृष्टिकोण से कोणों को निम्नांकित श्रेणी में वर्गीकृत किया जाता है :

(i) एक कोण जिसकी माप 90° से कम और 0° से अधिक हो उसे न्यूनकोण कहते हैं।

(ii) एक कोण जिसकी माप 90° हो उसे समकोण कहते हैं।

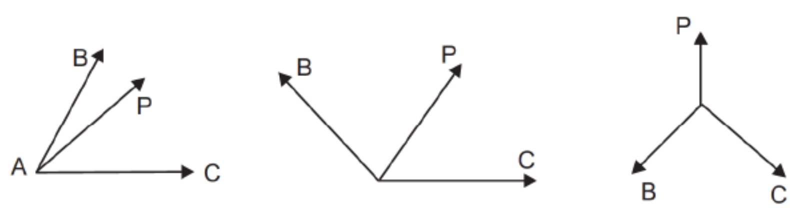
(iii) एक कोण जिसकी माप 90° से अधिक और 180° से कम हो उसे अधिक कोण कहते हैं।



आकृति 6.16

कोणों का युग्म :

आसन्न कोण : यदि दो कोणों में एक उभयनिष्ठ शीर्ष और एक उभयनिष्ठ भुजा होती है परन्तु कोई भी अंत: बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होता है। ऐसे कोणों को आसन्न कोण कहते है।



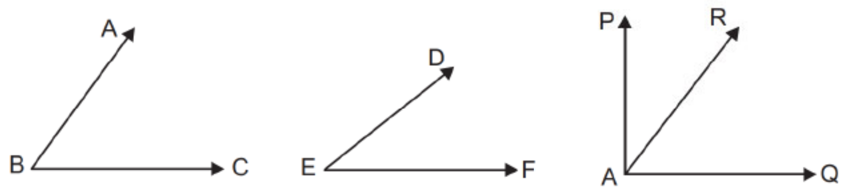
आकृति 6.17

उपरोक्त तीन आकृतियों में दो कोणों का युग्म और इस प्रकार है जिसका उभयनिष्ठ शीर्ष A है, उनका उभयनिष्ठ भुजा है और कोई भी अंत: बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है।

अतः $\angle BAP$ और आसन्न होता है।

पूरक कोण : जब दो कोणों के मापों का योग 90° होता है तो ये पूरक कोण कहलाते हैं। स्पष्ट है कि दोनों कोण न्यूनकोण होंगे।

(i) (ii)



आकृति 6.18

आकृति 6.18 (i) में

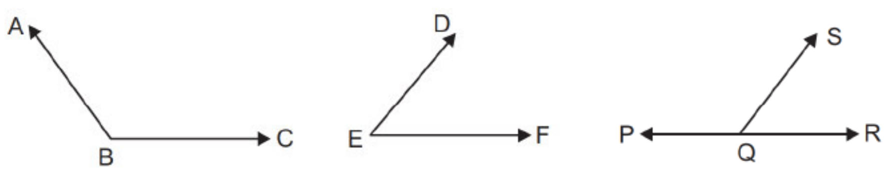
इस तरह और पूरक कोण है।

आकृति 6.18 (ii) में,

इस प्रकार और पूरक कोण है

पूरक कोण, आसन्न कोण हो सकता है, या नहीं भी हो सकता है।

संपूरक कोण : जब दो कोणों के मापों का योग 180° होता है तो कोणों के ऐसे युग्म संपूरक कोण कहलाते हैं।



(I) (II)

आकृति 6.19

आकृति 6.19 (i) में

अतः और संपूरक कोण बनाते हैं।

आकृति 6.19 (ii)

अतः और आसन्न संपूरक कोण बनाते हैं।

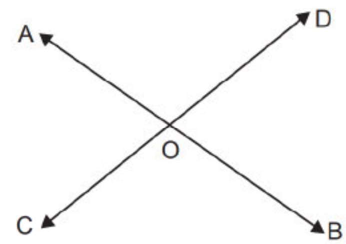
नोट : संपूरक कोणों के युग्म आसन्न कोण हो सकता है और नहीं भी हो सकता है।

टिप्पणी

टिप्पणी

उर्ध्वाधर सम्मुख कोण :

संलग्न आकृति 6.20 में रेखायें और $\overleftrightarrow{CD}$ एक दूसरे को O बिंदु पर प्रतिच्छेद कर रहे है। इस प्रकार आकृति में चार कोण बन रहे है, और $\angle AOD$ उन चार कोणों में से एक है। और $\overrightarrow{OC}$ किरणें $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OD}$ विपरीत दिशा में है।

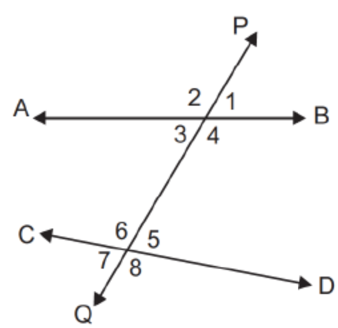


आकृति 6.20

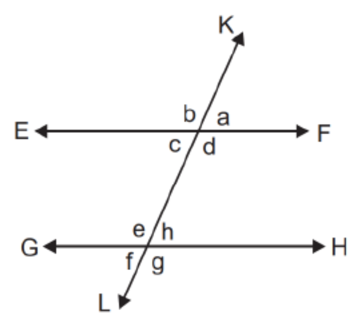
किरणों $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ द्वारा बनाये गये कोण $\angle BOC$ तथा किरणों और $\overrightarrow{OD}$ द्वारा बनाये गये कोण $\angle AOD$ को उर्ध्वाधर सम्मुख कोण कहते हैं।

इस प्रकार जब दो सीधी रेखायें एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तब उर्ध्वाधर सम्मुख कोण बनता है।

तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटे जाने पर बने कोण : आकृति 6.21 (i) में और $\overleftrightarrow{CD}$ दो असमांतर रेखायें है जिसे तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ काटती है। प्रतिच्छेदक बिंदुओं पर बने कोणों को संख्या 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 द्वारा चिन्हित किया गया है।



आकृति 6.21 (i)



आकृति 6.21 (ii)

आकृति 6.21 (ii) में $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ दो समांतर रेखायें है और तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{KL}$ उन्हें प्रतिच्छेद कर रहा है। प्रतिच्छेदक बिंदुओं पर बने कोणों को अक्षरों a, b, c, d, e, f, g और h द्वारा चिन्हित किया गया है।

आकृति 6.21 (i) में बने कोणों 1 और 5. 2 और 6. 4 और 8. 3 और 7 को संगत कोण कहते हैं।

टिप्पणी

कोण 1 और 7, 2 और 8 को बाह्य एकांतर कोण कहते हैं। जबकि कोण 3 और 5 4 और 6 को आंतरिक एकांतर कोण कहते हैं।

आकृति 6.21 (ii) कोण a और h, b और e, d और g, c और f संगत कोण हैं।

कोण तिर्यक रेखा द्वारा समांतर रेखाओं पर बनाये गये कोणों को माप सकते हैं। अवलोकन करने पर

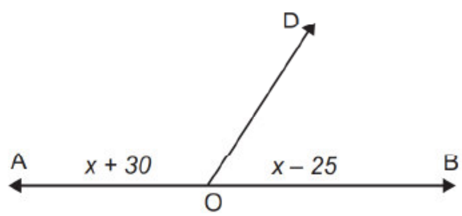
(i) बाह्य एकांतर कोण बराबर माप के होते हैं इसी प्रकार आंतरिक एकांतर कोण भी बराबर होते हैं।

(ii) संगत कोणों के प्रत्येक युग्म का माप समान होता है।

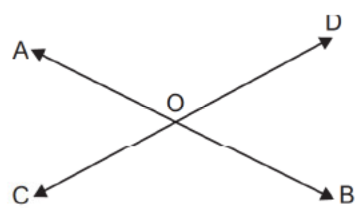
अपनी प्रगति की जांच कीजिए :

E-1 आकृति 6.22 में बिंदु O रेखायें $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{OD}$ पर उभयनिष्ठ है $\angle AOD$ और की माप क्रमशः $x + 30$ और $x - 25$ है। दोनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए। (डिग्री में)

$\angle BOD, \angle BOC$



आकृति 6.22



आकृति 6.23

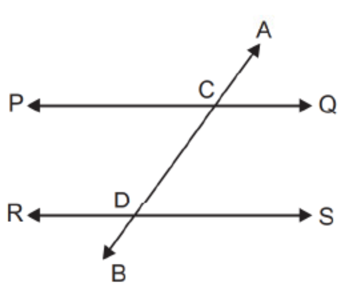
E-2 आकृति 6.23 में कोण , की माप ज्ञात कीजिये।

E-3 आकृति 6.24 में निम्नांकित कोणों की पहचान करिये।

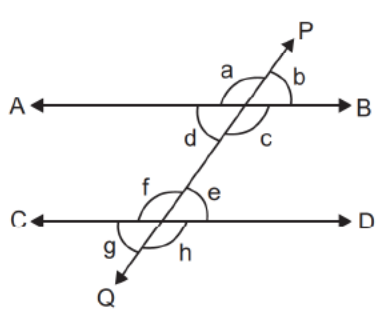
(i) संगत कोणों का युग्म

(ii) आंतरिक कोणों का युग्म

(iii) एकांतर कोणों का युग्म



आकृति 6.24



आकृति 6.25

टिप्पणी

E-4 आकृति 6.25 में और $\overleftrightarrow{PQ}$ उनको प्रतिच्छेद करता है। प्रतिच्छेदक बिंदुओं पर बने कोणों को a, b, c, d, e, f, g और h से प्रदर्शित किया गया है।

यदि $g = 35^o$ तो a, b, c, d, e, f और h का मान ज्ञात कीजिये।

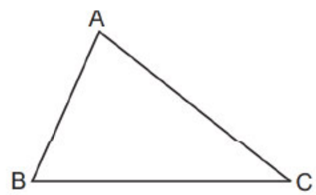
6.3 द्विआयामी बंद आकृतियां

इस भाग में हम तीन प्रकार के द्विआयामी बंद आकृतियों के गुणों एवं प्रकार के बारे में चर्चा करेंगे। इसमें त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त शामिल है।

6.3.1 त्रिभुज

(परिभाषा) यदि तीन अरेखीय बिंदु A, B और C हैं तो $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ द्वारा निर्मित आकृति को त्रिभुज ABC कहते हैं। (ΔABC के रूप में लिखते हैं)

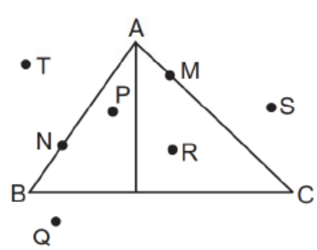
A, B और C को त्रिभुज का शीर्ष कहते हैं। $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ को भुजा और $\angle ABC$, और को ΔABC के कोण कहते हैं।



आकृति 6.26

त्रिभुज का बहिर्भाग और अभ्यंतर :

ΔABC (आकृति 6.26) से घिरा हुआ क्षेत्र ΔABC का अभ्यंतर कहलाता है। ΔABC और अभ्यंतर दोनों मिलकर त्रिभुजाकार क्षेत्र बनाते हैं। आकृति 6.27 में बिंदु P और R त्रिभुज ABC के अभ्यंतर पर स्थित है। बिंदु M और N त्रिभुज ABC पर स्थित है तथा Q, S, T, ΔABC के बहिर्भाग पर स्थित हैं। ΔABC के बाहर का क्षेत्र (जिस पर बिंदु Q, S, T स्थित है) को Δ का बहिभार्ग कहते हैं।



आकृति 6.27

टिप्पणी

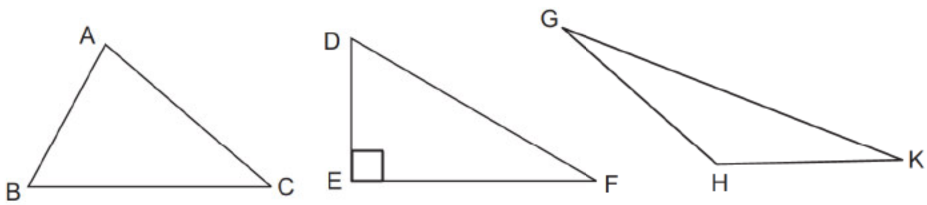
त्रिभुज का वर्गीकरण :

(a) कोणों के आधार पर त्रिभुजों का नामकरण :

(i) न्यूनकोण त्रिभुज : यदि त्रिभुज के तीनों कोण न्यून कोण है तो ऐसे त्रिभुज को न्यूनकोण त्रिभुज कहते हैं। आकृति 6.28 (a) न्यूनकोण त्रिभुज है।

(ii) समकोण त्रिभुज : ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो ऐसे त्रिभुज को समकोण त्रिभुज कहते हैं। आकृति 6.28 (b) समकोण त्रिभुज है।

(iii) अधिक कोण त्रिभुज : यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण हो ऐसे त्रिभुज को अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं। आकृति 6.28 (C) एक समकोण त्रिभुज है।



(a) न्यून कोण त्रिभुज **(b) समकोण त्रिभुज** **(c) अधिक कोण त्रिभुज**

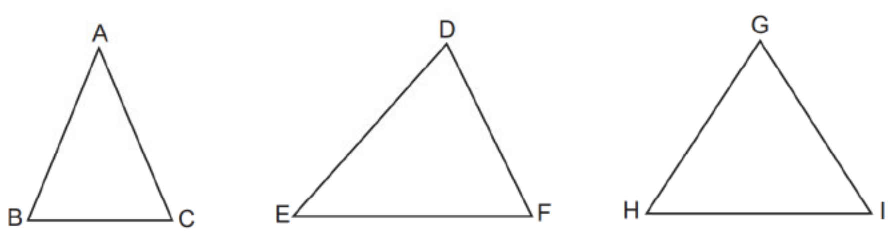
आकृति 6.28

(b) भुजाओं की लम्बाई के आधार पर त्रिभुज का वर्गीकरण :

(i) समद्विबाहु त्रिभुज : यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं की लम्बाई बराबर हो ऐसे त्रिभुज को समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं। (आकृति 6.29 (i))

(ii) विषमबाहु त्रिभुज : यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएं बराबर नहीं है ऐसे त्रिभुज को विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। (आकृति 6.29 (ii))

(iii) समबाहु त्रिभुज : यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएं बराबर हो तो ऐसे त्रिभुज को समबाहु त्रिभुज कहते हैं। (आकृति 6.29 (iii))



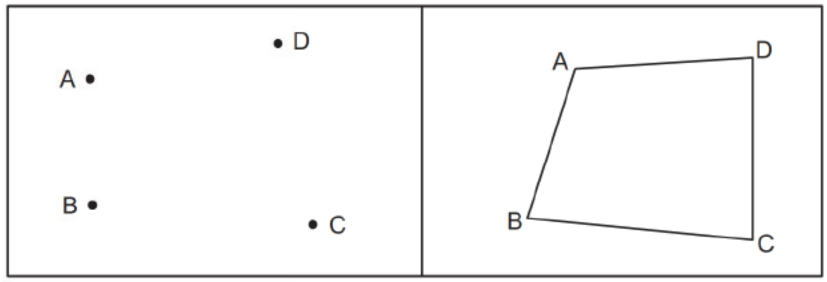
(i) समद्विबाहु त्रिभुज **(ii) विषमबाहु त्रिभुज** **(iii) समबाहु त्रिभुज**

आकृति 6.29

टिप्पणी

6.3.2 चतुर्भुज

निम्न आकृति को देखें



(i) (ii)

आकृति 6.30

आकृति 6.30 (i) में चार बिंदुएं A, B, C और D है। कोई भी तीन बिंदु संरेखीय नहीं है।

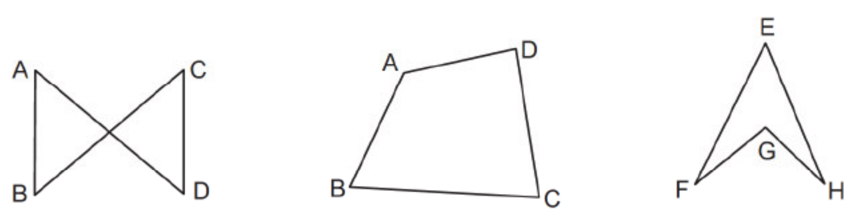
आकृति 6.30 (ii) में बिंदुओं A, B, C और D को सीधी रेखाओं और $\overline{DA}$ के द्वारा जोड़ दिया गया हैं।

रेखाखंड $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ ऐसे है कि कोई भी दो रेखाखंड अंत बिंदु के अतिरिक्त कही पर भी नहीं मिलते है।

ऐसी स्थिति में $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ द्वारा निर्मित आकृति को चतुर्भुज कहते हैं। निर्मित चतुर्भुज को ABCD के द्वारा नामित किया गया है।

बिंदु A, B, C और D चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं, $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ चतुर्भुज ABCD की भुजाएं हैं। चतुर्भुज ABCD के चार कोण $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ और है, और $\overline{BD}$ चतुर्भुज के विकर्ण है।

आकृति 6.31 (a) को देखें इसमें A, B, C और D एक समतल पर है तथा कोई भी 3 बिंदु संरेखीय नहीं हैं।



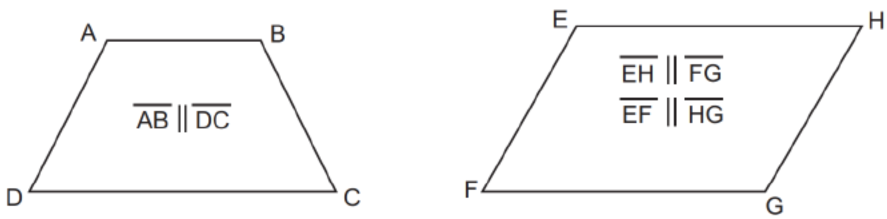
(a) (b) (c)

आकृति 6.31

परन्तु $\overline{AD}$ और $\overline{BC}$ अंत बिंदु के अतिरिक्त भी एक और बिंदु मिल रहे है। अतः $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ एक चतुर्भुज नहीं बनाते है। आकृति 6.31 (b) उत्तल चतुर्भुज है। और आकृति 6.31 (c) में Reontraut चतुर्भुज है। हम सिर्फ उत्तल चतुर्भुज के बारे में चर्चा करेंगे।

चतुर्भुजों के प्रकार :

(i) **समलंब चतुर्भुज** : समलंब एक ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें भुजाओं का एक युग्म समांतर होता है। आकृति 6.32 (i) में एक समलंब है जिसकी $\overline{AB} \| \overline{DC}$ है।

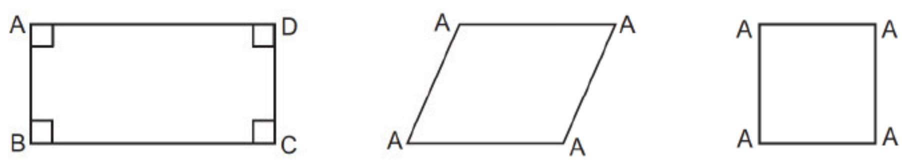


(i) समलंब (ii) समांतर चतुर्भुज

आकृति 6.32

$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D,$ (ii) **समांतर चतुर्भुज** : एक ऐसा चतुर्भुज जिसके सम्मुख भुजाएं समांतर होती है, समांतर चतुर्भुज कहलाती है। आकृति 6.32 (ii) में $\overline{EF} \| \overline{GH}$ और $\overline{FG} \| \overline{EH}$ है अतः EF GH एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) **आयत** : आयत एक समांतर चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समकोण होते है।



(i) आयत (ii) सम चतुर्भुज (iii) वर्ग

आकृति 6.33

आकृति 6.33 में $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D,$ समकोण है अतः ABCD एक आयत है।

(iv) **सम चतुर्भुज** : एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएं बराबर लंबाई की होती है उसे सम चतुर्भुज कहते हैं। आकृति 6.33 (ii) एक सम चतुर्भुज है।

(v) **वर्ग** : एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएं बराबर लम्बाई की होती है और सभी कोण समकोण होता है उसे वर्ग कहते हैं। आकृति 6.33 (iii) एक वर्ग है। इसकी सभी भुजाएं $AB = BC = CD = DA$ हैं, और समकोण हैं अतः ABCD एक वर्ग है।

टिप्पणी

सभी प्रकार के चतुर्भुजों को आपस में संबंध का प्रवाह चार्ट :

चतुर्भुज

विपरीत रेखा युग्म समांतर होते हैं

समलंब

सम्मुख भुजाएं समांतर होती हैं

समांतर चतुर्भुज

एक आसन्न भुजा युग्म की लम्बाई बराबर

सम चतुर्भुज

सभी कोण समकोण

सभी कोण समकोण

आयत

एक आसन्न भुजा युग्म की लम्बाई बराबर

वर्ग

नोट : विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणों को प्रयोगों के द्वारा जाना जा सकता है।

- एक चतुर्भुज का परिमाप = सभी चारों भुजाओं की लम्बाई का योग

  एक चतुर्भुज का क्षेत्रफल = विकर्ण खींचने के पश्चात् बने दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

- समलंब की परिमाप = सभी चारों भुजाओं की लम्बाई का योग

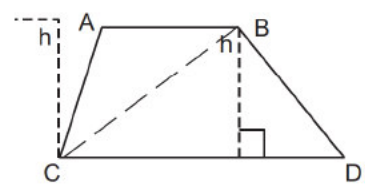
  समलंब का क्षेत्रफल ABCD (आकृति 6.34)

  $= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta BCD$ का क्षेत्रफल

  $= \frac{1}{2} AB \times h + \frac{1}{2} CD \times h$

  $= \frac{1}{2} h (AB + CD)$

  $= \frac{1}{2}h$ (समांतर भुजाओं का योग)



$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ समलंब

आकृति 6.34

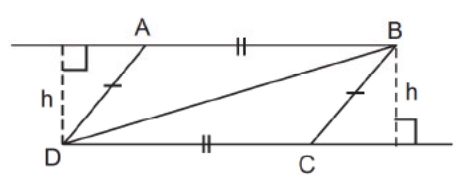
- समांतर चतुर्भुज का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$ (आकृति 6.35)

  $= AB + BC + AB + BC$

  $= 2AB + 2BC = 2(AB+BC)$

  क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई

  (आधार DC और ऊंचाई h है)

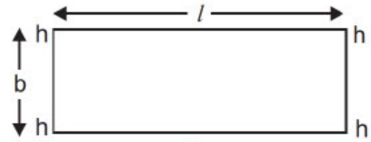


समांतर चतुर्भुज

आकृति 6.35

टिप्पणी

- आयत का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$ (आकृति 6.36)



आकृति 6.36

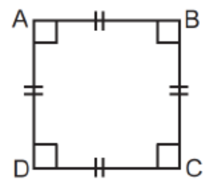
$= l + b + l + b = 2l + 2b = 2\,(l + b)$

[जहां $l = AD$ की लम्बाई, $b = AB$ की लम्बाई]

आयत का क्षेत्रफल $= l \times b$

- सम चतुर्भुज का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$ (आकृति 6.37)

$= AB + AB + AB + AB = 4AB = 4 \times$ एक भुजा की लम्बाई सम चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर द्विभाजित करते है।



सम चतुर्भुज

आकृति 6.37

$\therefore$ सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल ABCD

$=$ ABC का क्षेत्रफल $+$ ACD का क्षेत्रफल

$= AC \times BO + AC \times DO$

$= AC\,(BO + DO) = AC \times BD$

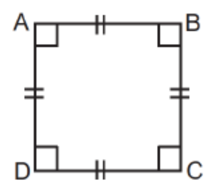
$=$ (विकर्णो की लम्बाई का गुणनफल)

- वर्ग का परिमाप $= 4 \times$ एक भुजा की लंबाई

वर्ग का क्षेत्रफल $= AB \times AD$

$= AB \times AB$ (सभी भुजा बराबर है)

$= AB^2 =$ एक भुजा की लम्बाई का वर्ग



वर्ग

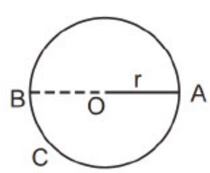
आकृति 6.38

6.3.3 वृत्त

'वृत्त' वक्र रेखा द्वारा किसी समतल पर घेरे गये स्थान की द्वि-आयामी आकृति होती है।

परिभाषा : एक समतल वक्र जिसके सभी बिंदु समतल में स्थित एक 'नियत बिंदु' से एक ही दूरी पर होते हैं।

नियत बिंदु वृत्त का केंद्र तथा नियत दूरी वृत्त की त्रिज्या होती है।

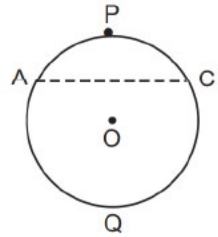


आकृति 6.39

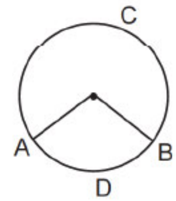
वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड 'जीवा' होता है। जिस जीवा पर वृत्त का केंद्र स्थित होता है, उसे 'वृत्त के व्यास के नाम से जाना जाता है। आकृति 6.39 में वृत्त

टिप्पणी

का व्यास है। AB (अर्थात् $\overline{AB}$ की लम्बाई) की माप वृत्त के व्यास की माप है (जो कि 'd' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।) $\overline{OA}$ और $\overline{OB}$ प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या है।



आकृति 6.40 (अ)



आकृति 6.40 (ब)

∵ .

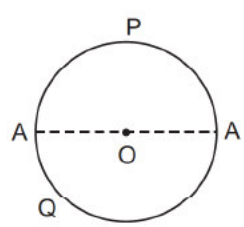
आकृति 6.40 (अ) में, A तथा C वृत्त ABC पर स्थित दो बिंदु हैं। ये दो बिंदु वृत्त को दो भागों में विभाजित करते हैं, यह प्रत्येक भाग 'चाप' के नाम से जाना जाता है जो कि बिंदु A तथा C पर समाप्त होता है। वृत्त का जीवा है। P तथा Q, A और C के अतिरिक्त दो बिंदु हैं। P तथा O जीवा $\overline{AC}$ के विपरीत और है जबकि Q तथा O एक ही और स्थित हैं।

वृत्त के जिस भाग (चाप) में P स्थित है, उसे चाप $\widehat{APC}$ से प्रदर्शित किया गया है, तथा जिस भाग में Q स्थित है उसे चाप $\widehat{AQC}$ द्वारा चित्र 6.40 (अ) में प्रदर्शित किया गया है। $\widehat{APC}$ न्यून चाप तथा $\widehat{AQC}$ बृहद चाप द्वारा जाना जाता है। $\widehat{APC}$ तथा $\widehat{AQC}$ विपरीत चाप का युग्म है।

चित्र 6.40 (ब) में प्रदर्शित वृत्त ABC में, त्रिज्या $\overline{AO}$ और $\overline{BO}$ न्यून चाप $\widehat{ADB}$ के अंतिम बिंदु A तथा B पर खींचे गये हैं। AOB वृत्त के केंद्र O पर निर्मित कोण है। $\angle$AOB, $\widehat{ADB}$ द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण है।

AOB की माप $\widehat{ADB}$ के अंश की माप होगी। (जितना अधिक बड़ा वृत्त का चाप होगा, उतना ही अधिक अंश माप होगा) चाप $\widehat{ADB}$ द्वारा अंतरित कोण की माप $m\widehat{ADB}$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है।

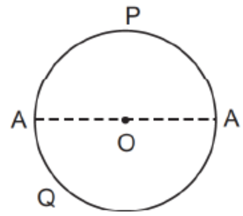
बृहत चाप का अंश माप = 360° – सम्मुख दिशा में निर्मित न्यून चाप का अंश माप



आकृति 6.41

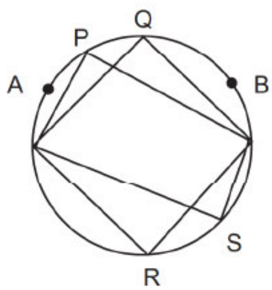
टिप्पणी

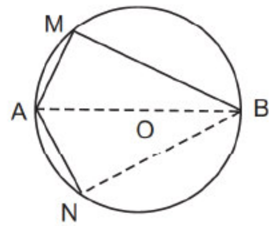
जैसे, $m\widehat{ACB}$ (चित्र 6.40 (ब) में) $= 360^{\circ} - m\widehat{ADB}$



आकृति 6.41

आकृति 6.41 में, वृत्त APC का व्यास है। प्रत्येक $\widehat{APC}$ तथा $\widehat{AQC}$ दो अर्द्धवृत्त हैं। अर्द्धवृत्त का अंश माप 90° होता है।





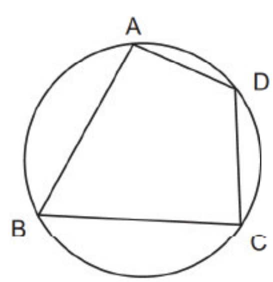
$\angle AQB$

आकृति 6.42 (i) **आकृति 6.42 (ii)**

आकृति 6.42 (i) में, P तथा Q, A तथा B अन्तिम बिंदु वाले न्यून चाप के अंतः बिंदु हैं। $\angle APB$ और , $\widehat{APB}$ में रेखित कोण हैं। इसी प्रकार तथा , $\widehat{ARB}$ में रेखित कोण हैं।

आकृति 6.42 (ii) में, AB वृत्त का व्यास है। M तथा N, A तथा B अंत बिंदु वाले अर्धवृत्त के अंतः बिंदु हैं, AMB और ANB प्रत्येक अर्द्धवृत्त में निर्मित कोण हैं।

चक्रीय चतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसके शीर्ष बिंदु एक वृत्त पर स्थित होते हैं उसे चक्रीय चतुर्भुज कहते है। आकृति 6.43 में चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

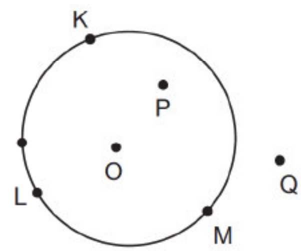


आकृति 6.43

टिप्पणी

वृत्त के अंतः एवं बाह्य बिंदु :

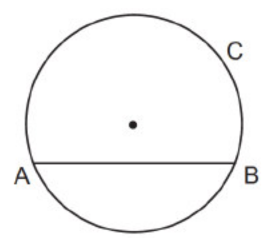
आकृति 6.44 में O वृत्त KLM का केंद्र है। अत: KLM बिंदु वृत्त पर स्थित है। P और Q वृत्त के तल पर दो ऐसे बिंदु हैं जहां $PO < r$ (यहां पर r वृत्त की त्रिज्या है) और $OQ > r$, P को वृत्त KLM का अंत: बिंदु और बिंदु Q को वृत्त KLM का बाह्य बिंदु कहते है। वृत्त पर स्थित सभी बिंदु और सभी अंत: बिंदु मिलाकर वृत्ताकार क्षेत्र बनाते हैं।



आकृति 6.44

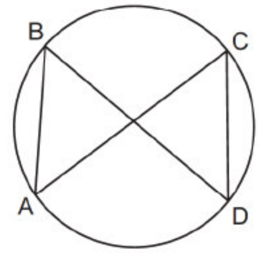
वृत्त का खण्ड :

आकृति 6.45 में वृत्त ABC की जीवा है। $\overline{AB}$ वृत्त को दो भागों में बांटता है, प्रत्येक भाग को वृत्तखंड कहते हैं। वह खण्ड जिसमें केंद्र O स्थित नहीं है उसे न्यून खंड और जिस पर केंद्र O स्थित है उसे वृहद् खंड कहते हैं।



आकृति 6.45

वृत्त के कुछ गुण

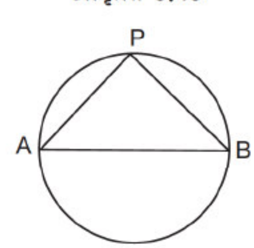


आकृति 6.46

1. एक ही चाप पर अंतरित कोण बराबर होते है (अर्थात एक ही खंड पर बने कोण)

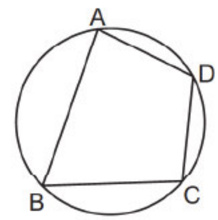
   $m\angle ABD = m\angle ACD$,

2. अर्धवृत्त पर अंतरित कोण समकोण होता है AB वृत्त का व्यास है। अत: $\widehat{APB}$ एक अर्धवृत्त है।



आकृति 6.47

3. चक्रीय चतुर्भुज के आमने सामने के कोण संपूरक कोण होते हैं। आकृति 6.48 चक्रीय चतुर्भुज ABCD है क्योंकि इसके शीर्ष वृत्त पर स्थित है।

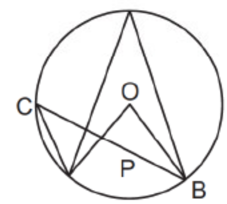


आकृति 6.48

4. किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण चाप द्वारा वृत्त के परिधि पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

आकृति 6.49 में

$$= 2\,m\angle ACB$$



आकृति 6.49

अपनी प्रगति की जांच करें :

E-5 रिक्त स्थानों को भरिये:

(a) एक समांतर चतुर्भुज जिसके दो आसन्न भुजाओं की लम्बाई बराबर है .... है।

(b) एक वृत्त की त्रिज्या एक रेखा खंड है जो वृत्त पर एक बिंदु को उसके .... से कहलाता है।

$m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle D = 180^\circ$ $m\angle AOB = 2\,m\angle APB$

(c) किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण 40° है तो उसके द्वारा वृत्त के परिधि पर अंतरित कोण का मान .... होगा।

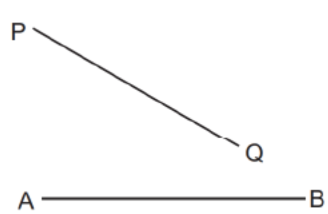
(d) एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग .... डिग्री होता है।

6.3.4 सगसमता और समरूपता

सर्वांगसम आकृति : दो समतल आकृति (एक तल में रेखित आकृति) को संर्वांगसम कहते है यदि एक रेखित आकृति दूसरे रेखित आकृति को अध्यारोपण करने पर पूर्णतया ढक लेता है। तब हम उसे सवंगिसम कहते है। सवंगिसम की उपरोक्त विवरण को प्रयोगात्मक कार्य के द्वारा समझा जा सकता है। कार्य को तर्कपूर्ण बनाने के लिए यहां पर कुछ परिभाषायें और कुछ शर्ते दिया गया है जो आकृति को सर्वांगसम बनाता है। सर्वांगसमता को चिन्ह से प्रदर्शित करते है।

(i) **रेखाखंड की सर्वांगसमता :** यदि दो रेखाखंडों की लम्बाई बराबर है तो रेखाखंडों को सर्वांगसम कहते हैं। इस प्रकार दो सर्वांगसम रेखाखंडों की लम्बाई बराबर होती है और

$\overline{AB} \cong \overline{PQ} \Rightarrow AB = PQ$



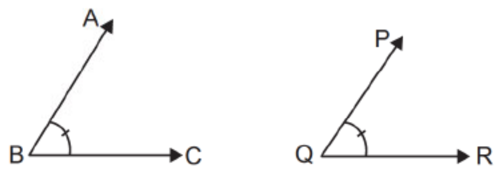
आकृति 6.50

टिप्पणी

(ii) **कोणों की सर्वांगसमता :** दो कोणों की माप यदि बराबर है तो उसे सर्वांगसम कोण कहते है। इस प्रकार दो सर्वांगसम कोणों की माप बराबर होती है।

$m\angle ABC = m\angle PQR \Rightarrow \angle ABC \cong \angle PQR$

और



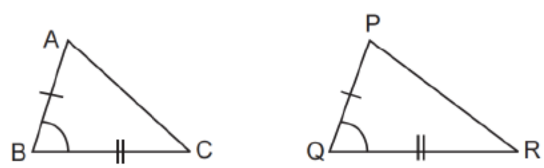
आकृति 6.51

त्रिभुजों की सर्वांगसमता :

निम्नलिखित प्रतिबंधों के अंतर्गत दो त्रिभुज सर्वांगसम बनते है

(i) यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, एक त्रिभुज की दो भुजाएं और उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हो, तो ये त्रिभुज सर्वांगसम होते है। इसे S - A - S सर्वांगसम प्रतिबंध कहते हैं।

ABC और PQR में यदि $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ और $\angle ABC \cong \angle PQR$, तब



आकृति 6.52

(ii) यदि दिये गये सुमेलन के अंतर्गत एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं क्रमशः किसी दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है। इसे SSS सर्वांगसम प्रतिबंध कहते है।

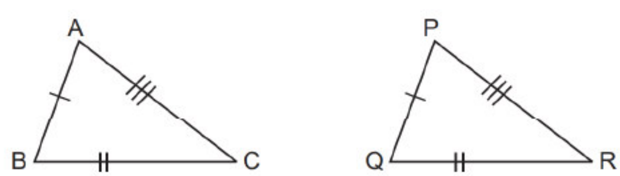
ABC और में

यदि

$\overline{BC} \simeq \overline{QR}$

और $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

तो ΔABC PQR



आकृति 6.53

(iii) यदि एक सुमेलन में, एक त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

ABC और Δ PQR में

यदि , ,

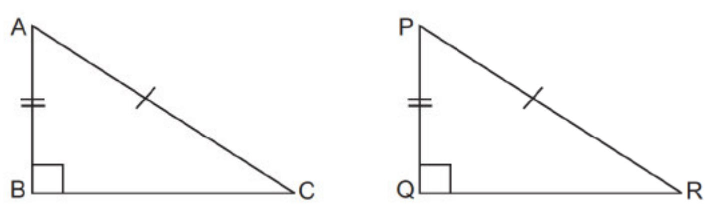
तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

इसे A-A-S सर्वांगसम प्रतिबंध कहते हैं।

आकृति 6.54

(iv) यदि एक सुमेलन के अंतर्गत किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इसे RHS सर्वांगसम प्रतिबंध कहते हैं।



आकृति 6.55

, में, समकोण है और , में समकोण है। यदि कर्ण और भुजा $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

नोट : दो सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल भी बराबर होते हैं।

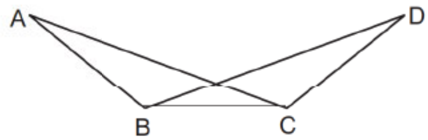
सवंगिसमता का अनुप्रयोग :

जब दो त्रिभुजों के दो कोणों और दो भुजाओं को सर्वांगसमता को सिद्ध करने की आवश्यकता होती है तो हम दोनों त्रिभुजों को सर्वांगसम सिद्ध करने का प्रयास करते हैं।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो ज्यामिति की कई समस्याओं को हल करने में सहायता करता है।

टिप्पणी

उदाहरण : संलग्न आकृति में , $\angle ABC \cong \angle BCD$ सिद्ध करो



आकृति 6.56

हल : ΔABC और में

(दिया हुआ है)

$\overline{BC}$ दोनों त्रिभुजों का उभयनिष्ठ भुजा है

$\angle ABC \cong \angle BCD$ (दिया हुआ है)

(S-A-S सर्वांगसम)

(संगत भुजायें)

त्रिभुजों की समरूपता :

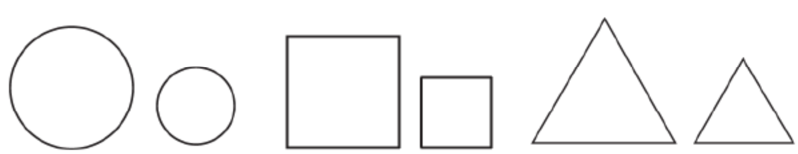
एक सम तल आकृति के दो पहलू होते है, आकार और रूप। यदि दो आकृतियों का आकार और रूप समान है तो वे सर्वांगसम होंगे। इनमें से एक का अक्स बनाकर दूसरी आकृति पर रखते है। यदि ये आकृतियां एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं तो वे सर्वांगसम कहलाती हैं।

अब दो आकृति लेते हैं जिनके समान रूप है। कुछ उदाहरण निम्न प्रकार से हैं।

(i) एक ही व्यक्ति के दो फोटो एक ही निगेटिव से बनाया गया परन्तु दोनों का आकार अलग-अलग है अर्थात समान रूप परन्तु भिन्न आकारों के।

(ii) भारत का मानचित्र पुस्तक में छपा है और एक मानचित्र दीवार पर बना हुआ है दोनों का रूप समान है परन्तु आकार भिन्न है।

(iii)



(a) (b) (c)

आकृति 6.57

दो वृत्त आकृति 6.57 में एक समान दिखाई दे रहे हैं अत: दोनों समरूप हैं। दोनों वर्ग समरूप हैं तथा दोनों त्रिभुज भी समरूप हैं।

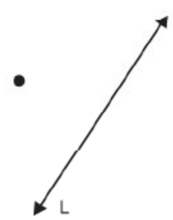
नोट : सर्वांगसम आकृतियां समरूप होते हैं, परन्तु समरूप आकृतियां सर्वांगिसम शायद न हो।

6.3.5 परावर्तन और सममिति

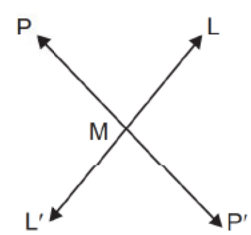
हम जानते हैं कि समतल दर्पण में प्रतिबिंब बनता है और एक छाया का निर्माण होता है। ज्यामिति में परावर्तन की अवधारणा उसी प्रकार है जैसे समतल दर्पण में परावर्तन की अवधारणा है।

(a) **एक रेखा में परावर्तन :**

(i) **एक रेखा में बिंदु का परावर्तन :** आकृति 6.58 (a) में L एक रेखा है और P एक बिंदु है। (कभी-कभी एक रेखा को एक अक्षर से नामित करते हैं) बिंदु P रेखा L से परावर्तित होता है और एक प्रतिबिंब बनाता है। प्रतिबिंब क्या है और कहां बनता है?



आकृति 6.58 (a)

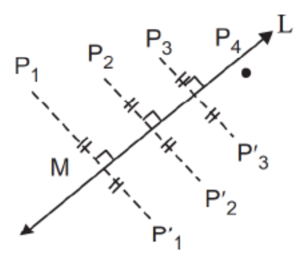


आकृति 6.58 (b)

प्रतिबिंब प्राप्त करने की विधि : आकृति 6.58 (b) P से रेखा L पर एक लम्ब रेखा $\overline{PM}$ खींचा। रेखा $\overrightarrow{PM}$ पर एक बिंदु P^1 इस प्रकार लिया कि P-M-P^1 और $PM = MP^1$ इस प्रकार हम बिंदु P का रेखा L पर परावर्तन के पश्चात छाया P^1 प्राप्त करते हैं। रेखा L को दर्पण रेखा कहते हैं।

आकृति 6.59 में P^1_1, P_1, का प्रतिबिंब है P^1_2 L में P_2 का प्रतिबिंब है

P^1_3 L में P_3 का प्रतिबिंब है



आकृति 6.59

टिप्पणी

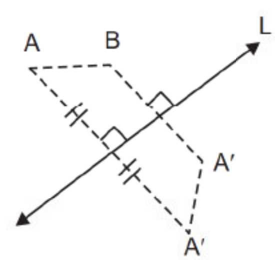
जैसे-जैसे बिंदु L के नजदीक हैं वैसे ही प्रतिबिंब भी L के नजदीक बनते हैं। P_4 रेखा L पर स्थित है। P_4 का प्रतिबिंब कहां पर है? P_4 का रेखा L से दूरी शून्य है क्योंकि P_4 L पर स्थित है। अत: P_4 का प्रतिबिंब का L से दूरी भी शून्य है इस प्रकार P_4 का प्रतिबिंब भी L पर स्थित है। P_4 का प्रतिबिंब स्वयं P_4 है।

अत: हम कह सकते है कि

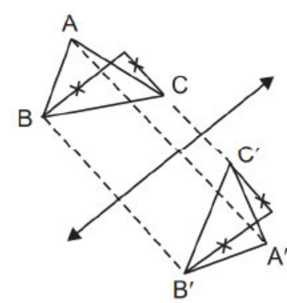
दर्पण रेखा पर स्थित बिंदु का प्रतिबिंब स्वयं बिंदु ही होता है।

(ii) **रेखाखंड का परावर्तन :** L एक दर्पण रेखा है और $\overline{AB}$ को परावर्तित करना है। (आकृति 6.60)

रेखाखंड $\overline{AB}$ का प्रतिबिंब दर्पण रेखा L में $\overline{A'B'}$ है जहां पर A' और B' दर्पण रेखा L पर क्रमश: A और B का प्रतिबिंब है।



आकृति 6.60

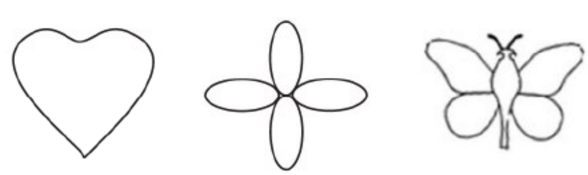


आकृति 6.61

(iii) त्रिभुज का परावर्तन :

आकृति 6.61 में दर्पण रेखा L में ΔABC का प्रतिबिंब है जहां पर A^1 B^1 और C^1 दर्पण रेखा L पर क्रमश: A, B और C का प्रतिबंब है।

सममिति : कुछ वस्तुओं के रूप और डिजाइन हमें बहुत आकर्षक लगता है। हम उन वस्तुओं को बहुत सुंदर कहते हैं। या डिजाइन बुहत अच्छा है कहते हैं। कुछ ऐसी ही रूपाकृति नीचे दी गयी हैं।



पान का पत्ता डिजाइन तितली

आकृति 6.62

टिप्पणी

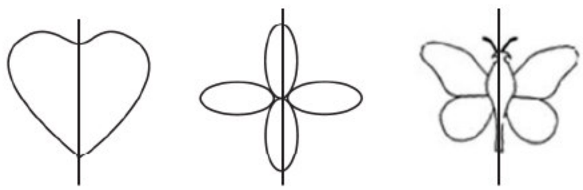
उपरोक्त प्रत्येक आकृति में एक रेखा को उचित रूप से खींचने के बारे में सोचते हैं ताकि

- यदि हम आकृति का अक्स प्राप्त करना चाहे
- आकृति को रेखा के अनुदिश काटना
- आरेखित रेखा के अनुदिश आकृति को मोड़ना

एक आकृति में रैखिक सममिति होती है यदि उसमें एक रेखा ऐसी हो जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, आकृति के दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाते हैं। ऐसी आकृति को सममित कहते हैं।

आरेखित रेखा जिसके अनुदिश आकृति को मोड़ने पर दो संपाती भागों में आकृति विभाजित हो जाता है उसे रैखिक सममिति कहते हैं।

उपरोक्त आकृतियों का रैखिक सममिति नीचे आरेखित है।



आकृति 6.63

$\overleftrightarrow{PQ}$

कुछ अंग्रेजी अक्षर जो रैखिक सममिति है नीचे दिये गये हैं

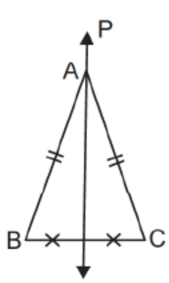
A B D E

आप इसी प्रकार अन्य रैखिक सममिति अक्षरों की खोज करें।

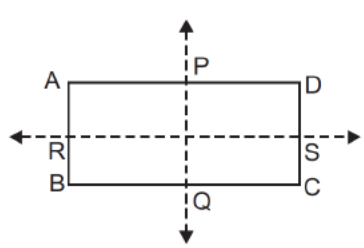
सममित रेखाएं और ज्यामितीय आकृति :

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है और सममित रेखा है, $\overleftrightarrow{PQ}$ शीर्ष A से और आधार के मध्य बिंदु Q से गुजरता है। (आकृति 6.64 देखें)

ABCD एक आयत है और इसके 2 सममित रेखांए है ये है $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ जहां P, Q, R और S क्रमश: रेखा $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ और $\overline{CD}$ के मध्य बिंदु है। (चित्र 6.65 देखें)



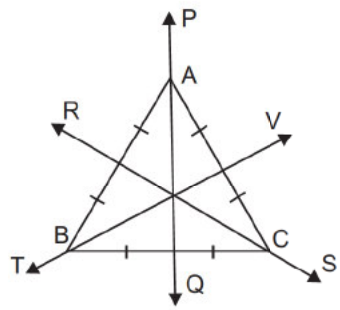
आकृति 6.64



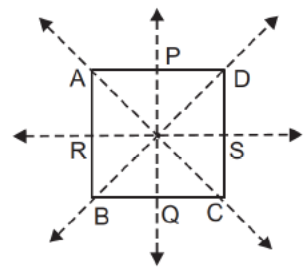
आकृति 6.65

टिप्पणी

ΔABC एक समबाहु त्रिभुज इसके 3 सममित रेखाएं है और ये रेखाएं है , $\overleftrightarrow{RS}$ और $\overleftrightarrow{TV}$ है। ये सभी रेखायें शीर्ष को उसके सम्मुख भुजाओं के मध्य बिंदु को जोड़ती है। (आकृति 6.66)



आकृति 6.66



आकृति 6.67

ABCD एक वर्ग है (आकृति 6.67) इसके 4 सममित रेखाएं है और ये रेखाएं है $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ है जहां P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ और $\overline{CD}$ के मध्य बिंदु है।

वृत्त के केंद्र से गुजरने वाली रेखा वृत्त का सममित रेखा है।

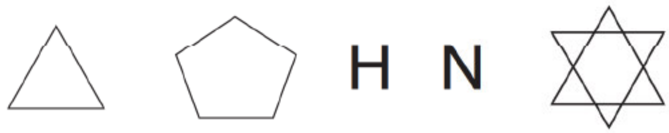
इस प्रकार ज्यामितीय आकृतियों की एक या एक से अधिक सममित रेखाएं होती है।

घूर्णन सममिति : क्या आपने कभी कागज की हवाई चकरी बनाई है आकृति 6.68 में एक हवाई चकरी को दिखाया गया है इसके 4 ब्लेड है और इनके नाम A, B, C और D है। यदि आप इसके केंद्र वाले स्थिर बिंदु के पारित वामावर्त घुमाएं तो ब्लेड A, B ब्लेड के स्थान पर होगा और B, C और D क्रमश: C, D और A की जगह पर होंगे।

आकृति 6.68

एक पूरे चक्कर में ऐसी चार स्थितियां हैं जब चकरी पहली जैसी दिखती है। इसी कारण, हम कहते हैं कि चकरी में क्रम 4 (order 4) की घूर्णन सममिति है। जब कोई वस्तु घूर्णन करती है तो उसके आकार और माप में कोई परिवर्तन नहीं होता है। घूर्णन उस वस्तु को एक निश्चित बिंदु के चारों ओर घुमाता है इस बिंदु को सममित बिंदु कहते हैं।

जांच करें कि क्या निम्नांकित आकृतियों का घूर्णन सममिति है यदि है तो प्रत्येक स्थिति में, घूर्णन सममिति का क्रम बतायें।



(a) (b) (c) (d) (e)

आकृति 6.69

अपनी प्रगति की जांच करें

E-6 रिक्त स्थानों को भरिये

(a) दो रेखायें सर्वांगसम होती हैं यदि .... बराबर है।

(b) दो कोण सर्वांगसम है यदि उनके .... बराबर है।

(c) यदि त्रिभुज सर्वांगसम है तो उनके .... कोणों की माप भी बराबर होती है।

(d) दो समरूप त्रिभुजों के .... समान होते है।

ΔABC ΔPQR $m\angle Q$

E-7 ΔABC और , AB = 4 सेमी, BC = 7 सेमी, PQ = 6 सेमी, QR = 10.5 सेमी और

(a) PR ज्ञात करें यदि AC = 8 सेमी।

(b) और के क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिये।

6.4 त्रिविमीय आकार

हम पहले ही त्रिविमीय आकारों के बारे में चर्चा कर चुके हैं। ऐसे आकार जो तीन दिशाओं में विस्तारित होते हैं, बांये से दांये, पास से दूर, और ऊपर से नीचे को त्रिविमीय आकार कहते हैं।

> आकार जो तीन दिशाओं में परस्पर समकोण पर विस्तारित होते हैं उसे त्रिविमीय आकार कहते है।

विभिन्न प्रकार के सम त्रिविमीय आकार :

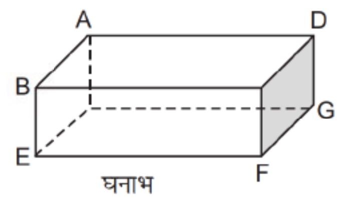
(a) घनाभ :

एक बाक्स, एक ईंट, इसी प्रकार के अन्य आकार घनाभ कहलाता है एक घनाभ आकृति 6.70 में दिखाया गया इसके 8 शीर्ष है। (A, B, C, D, E, F, G, H) 12 किनारे

टिप्पणी

, और 6 फलक है।

(ABCD, EFGH, ABEH, BEF, CFGD और AHGD) BC, EF, HG और AD घनाभ की लम्बाई (l) है, AB, CD, EH और FG घनाभ की चौड़ाई (b) है, AH, BE, CF और DG घनाभ की ऊंचाई (h) है।



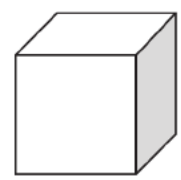
आकृति 6.70

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = उपरीय और तलीय पृष्ठ का क्षेत्रफल + दांये और बांये पृष्ठ का क्षेत्रफल + सामने और पीछे के पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2l \times b + 2\, b \times h + 2lh = 2\,(lb + bh + lh)$ वर्ग इकाई

घनाभ का आयतन : त्रिविमीय वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह उसका आयतन कहलाता है और यह घनाम की लम्बाई, ऊंचाई और चौड़ाई के गुणनफल के बराबर होता है।

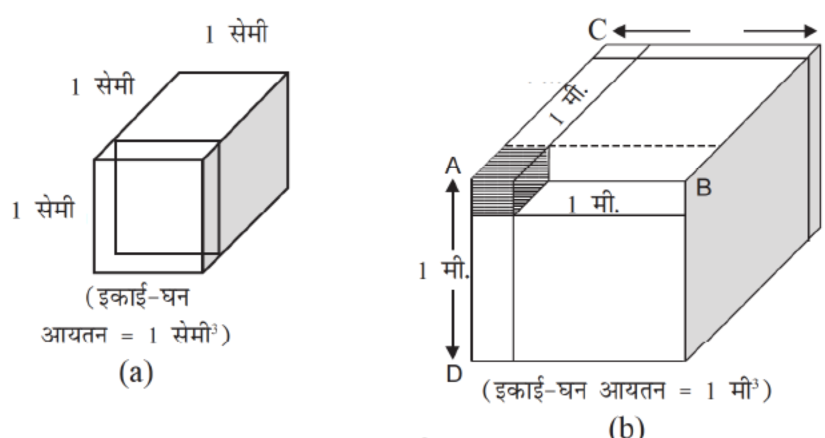
अत: आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊंचाई $= l \times b \times h$ घन इकाई

(b) **घन :** एक घनाम जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊंचाई बराबर हो उसे घन कहते है। इस प्रकार घन के सभी किनारों की लम्बाई बराबर होती हैं और सभी फलक वर्ग होते हैं।



आकृति 6.71

आयतन माप की इकाई : त्रिविमीय आकार के आयतन की माप के लिए घन इकाई के आयतन का उपयोग करते हैं। एक घन जिसके प्रत्येक किनारे की लम्बाई इकाई हो। यदि इकाई घन की प्रत्येक किनारे की लम्बाई 1 सेमी. है तो उसका आयतन 1 सेमी^{3} है।



आकृति 6.72

एक इकाई घन जिसका प्रत्येक किनारा 1 सेमी लम्बा है, उसे से.मी. घन कहते हैं एक इकाई घन जिसका प्रत्येक किनारा 1 मीटर लम्बा है उसे मी.घन कहते हैं आकृति 6.72 (b) में छायांकित हिस्सा एक सेमी घन है अर्थात प्रत्येक किनारा की लम्बाई एक सेमी है। इस प्रकार यदि मीटर-घन को सेमी. घन में AB किनारे के अनुदिश काटे तो हमें 100 घन प्राप्त होंगे। 100 घन किनारे AC के अनुदिश और 100 घन किनारा AD के अनुदिश काटने पर।

अत: कुल प्राप्त सेमी-घनों की संख्या होगी

$$100 \times 100 \times 100 = 10,00,000$$

इस प्रकार 1मी.^{3} = 10,00,000 सेमी^{3} = 10^6 सेमी^{3}

1 सेमी^{3} व 1मी^{3} को घन इकाई कहते है

नोट : (i) सेमी-वर्ग, मीटर-वर्ग का क्षेत्रफल का परिकलन नहीं किया गया है। इनको क्रमश: 1 सेमी^{2} और 1 मीटर^2 परिभाषित किया गया है।

(ii) सेमी-घन और मीटर-घन के आयतन को क्रमश: 1 सेमी^{3} और 1 मीटर^3 परिभाषित किया गया है।

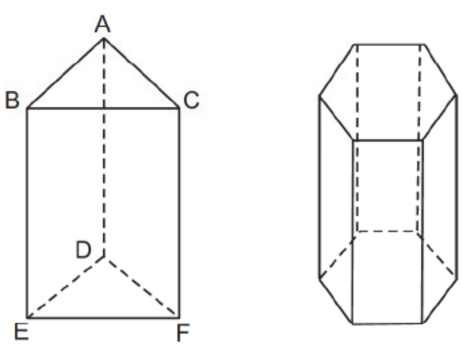
(iii) 1 सेमी^{2} क्षेत्रफल माप की इकाई है परन्तु एक सेमी-वर्ग एक वर्ग है जिसकी लम्बाई 1 सेमी. है। इस प्रकार 1 सेमी^{2} और एक सेमी-वर्ग पूर्णत: अलग-अलग अवधारणाओं को प्रदर्शित करता है।

एक सेमी-वर्ग का क्षेत्रफल = 1 सेमी^{2}। इसी प्रकार 1 मी^{3} और एक मीटर-घन अलग है। एक मीटर-घन का आयतन = 1 मी.^{3}

(b) प्रिज्म : आकृति 6.73 (i) में त्रिविमीय आकार के निम्नलिखित विशेषताएं है।

इसके 2 त्रिभुजाकार फलक है।

(एक ऊपर और एक नीचे) इन्हें हम सामान्यत: आधार कहते हैं। इसके 3 आयाताकार फलक भी हैं जो त्रिभुज की भुजाओं के लम्बवत है, ये पृष्ठ पार्श्वफलक कहलाते हैं। दोनों त्रिभुजों के बीच की दूरी को प्रिज्म की ऊंचाई कहते हैं। (यदि प्रिज्म क्षैतिज अवस्था में हो तो इसे प्रिज्म की लम्बाई कहते हैं)



(i) (ii)

आकृति 6.73

टिप्पणी

आकृति 6.73 (ii) एक प्रिज्म की आकृति है जिसका आधार षष्टभुज है।

प्रिज्म का पृष्ठीय क्षेत्रफल :

पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= AB \times h + BC \times h + CA \times h$ वर्ग-इकाई (h ऊंचाई है)

$= h\,(AB + BC + CA)$ वर्ग-इकाई (h सर्वनिष्ठ है)

$= h \times$ आधार का परिमाप

आधारों का क्षेत्रफल $= 2 \times$ आधार का क्षेत्रफल

प्रिज्म का पृष्ठीय क्षेत्रफल = पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधारों का क्षेत्रफल

$= h \times$ आधार का परिमाप $+ 2 \times$ आधार का क्षेत्रफल

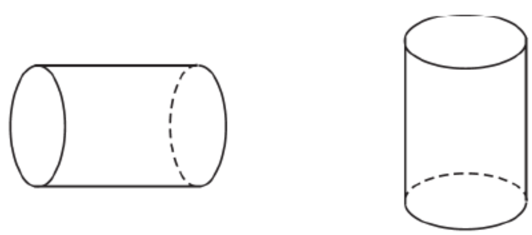
प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊंचाई

नोट : ये सभी नियम विभिन्न बहुभुज वाले आधार वाले प्रिज्म के लिए भी लागू होगा।

(c) बेलन :

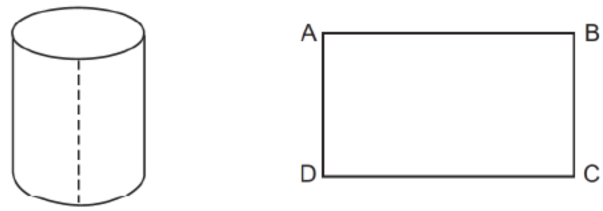
बेलन के दो वृत्ताकार आधार होते है आधार को छोड़कर बेलन के चारों ओर वक्र पृष्ठ है।

दोनों आधारों के बीच की दूरी को बेलन की लम्बाई या ऊंचाई कहते है।



आकृति 6.74

वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल : बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल एक आयताकार कागज के सीट के क्षेत्रफल के बराबर है जो उस वक्र पृष्ठ को पूरी तरह ढक ले। ऐसा आयताकार कागज आकृति 6.75(a) में है।



(a) (b)

आकृति 6.75

आयताकार कागज सीट की लम्बाई (l) = आधार के वृत्त की परिमाप

$$= 2\pi r$$

और आयताकार कागज सीट की चौड़ाई (b) = बेलन की ऊंचाई = h आयताकार कागज का क्षेत्रफल = $l \times b =$ $\times h =$ h वर्ग-इकाई

बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = वर्ग-इकाई

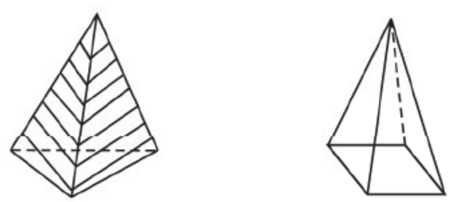
बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई = घन इकाई

नोट : एक बेलन का विशेष प्रिज्म है जिसका आधार वृत्ताकार है।

(d) ***पिरामिड :*** पिरामिड मिश्र के खलीफाओं (राजा और रानी) के कब्र है। पिरामिड के आधार त्रिभुज या बहुभुज है और ऊपर एक बिंदु पर समाप्त हो जाते हैं, ऐसी कुछ आकार निम्नांकित है।

त्रिभुजाकार आधार वाले पिरामिड के 4 शीर्ष, 6 किनारे और 4 फलक प्रत्येक त्रिभुज है। चतुर्भुजाकार आधार वाले पिरामिड के 5 शीर्ष हैं 8 किनारे और 5 फलक है जिसके तियर्क फलक त्रिभुजाकार है और आधार चतुर्भुजाकार है।

$2\pi rh$ $\pi r^2 h$



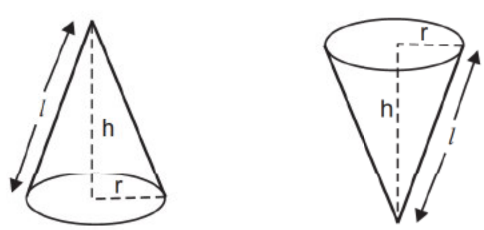
(a) (b)

आकृति 6.76

पिरामिड का पृष्ठीय क्षेत्रफल = तिर्यक फलक का क्षेत्रफल + आधार पिरामिड का आयतन =

$$= \frac{1}{3} \times \text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{ऊंचाई}$$

(e) ***शंकु :*** सर्कस के एक जोकर की टोपी और कीप बिना नली के एक ऐसे आकार को प्रस्तुत करते हैं जिसे शंकु कहते हैं। इसका एक शीर्ष होता है एक वृत्ताकार किनारा और 2 फलक होते हैं जिसमें से एक वक्र होता है दूसरा वृत्ताकार सपाट आकार का होता है।



शंकु **उल्टा शंकु**

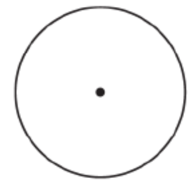
आकृति 6.77

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi r\sqrt{h^2 + r^2} + \pi r^2 = \pi r\left(\sqrt{h^2 + r^2} + r\right)$$

जहां पर वृत्ताकार आधार की त्रिज्या है। और ऊंचाई h है (आकृति 6.77) तिर्यक ऊंचाई $(\ell) = \sqrt{r^2 + h^2}$

(f) ***गोला :*** फुटबाल का आकार एक गोला को प्रदर्शित करता है इसका कोई शीर्ष नहीं होता है और नहीं उसका कोई किनारा होता है। परन्तु इसका एक वक्र पृष्ठ होता है।



आकृति 6.78

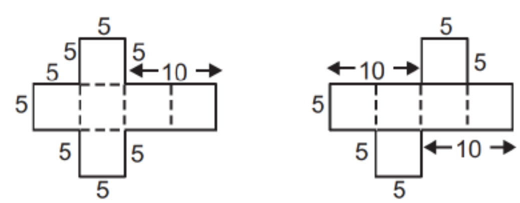
गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r गोले की त्रिज्या है और π = = 3.14 लें)

3-D आकार बनाने के लिए जाल (नेट)

जाल 2-D में एक प्रकार का ऐसा ढांचा (या रूपरेखा) होता है जिसे मोड़ने पर परिणामस्वरूप एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है। एक चार्ट शीट पर एक रेखाकृति इस प्रकार खींचे ताकि इसे उपर्युक्त प्रकार से मोड़ने पर एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है।

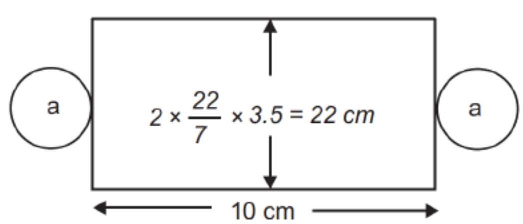
(i) 5 से.मी. किनारे वाले घन प्राप्त करना :



(i) (ii)

उपरोक्त जाल (नेट) के सभी कोण समकोण है और किनारों की माप दी गयी है।

(ii) 3.5 से.मी. त्रिज्या तथा 10 से.मी. ऊंचे बेलन के लिए जाल (नेट) बनाना :



a और b दो वृत्तों को प्रदर्शित करता है जिसकी त्रिज्या 3.5 से.मी. है और शेष भाग एक आयत है जैसा कि उपरोक्त आकृति में दिखाया गया है।

अपनी प्रगति की जांच करें :

E-9 उस सबसे बड़े घन के प्रत्येक किनारों की लम्बाई क्या होगी जिसे 175 से.मी. लम्बे, 105 से.मी. चौड़े और 64 सेमी. ऊंचे वूडन घनाभ को काट कर प्राप्त किया जा सकता है।

E-10 उन दो बेलनाकार के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिये जिसे एक 33 सेमी. लम्बे 22 सेमी. चौड़े आयताकार कागज की शीट का पूरा इस्तेमाल करके तैयार किया जा सकता है।

ज्यामितीय उपकरणों की सहायता से संरचना करना

ज्यामितीय उपकरणों में स्केल या रूलर, परकार, डिवाइडर, सेट स्क्वेयर का युग्म, (एक 30°-60° सेट स्क्वेयर और दूसरा 45°-45° सेट स्क्वेयर) और चांदा शामिल है। जब हम स्केल के सीधा किनारे का उपयोग करते हैं तब हम इसे रूलर के रूप में विचार करते हैं। अर्थात एक रूलर एक आयताकार प्लेट है जिसके केवल सीधे किनारे हैं।

रूलर और परकार का उपयोग : एक समय था जब गणितज्ञ सोचते थे कि रूलर और परकार का उपयोग करके कई आभारभूत गणितीय कार्यों को पूरा किया जा सकता है। यद्यापि रूलर और परकार के उपयोग करके निम्नलिखित ज्यामितीय आकृति की रचना की जा सकती है।

(i) दिये हुये लम्बाई की रेखाखंड

(ii) दिये हुये रेखाखंड का लम्बवत समद्विभाजक

(iii) एक दिये रेखा के लम्बवत/समांतर रेखा खींचना

  (a) एक दिये हुए बिंदु पर

  (b) रेखा से बाहर दिये हुए बिंदु पर

(iv) दिये हुए कोण के बराबर माप का कोण

(v) दिये हुए कोण का समद्विभाजक

(vi) 60° के कोण, इसके गुणक और सहगुणक

(vii) दिये हुए रेखाखंड को दो बराबर भागों में बांटना

(viii) दिये हुए माप का त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त खींचना

आपने अपने विद्यालय के दिनों में इन आकृतियों की अवश्य रचना की होगी। आपके अधिगम को पुनर्बलन प्रदान करने के लिए हम यहां पर संक्षिप्त में संरचना की विधियों को प्रस्तुत किया है।

(i) दिये हुए लम्बाई के रेखाखंड की रचना करना :

(a) एक सीधी रेखा एक स्केल के सीधे किनारे का उपयोग करके खींचा जा सकता है। (आकृति 6.79 (a))

(b) दिये हुए लम्बाई के बराबर, परकार में त्रिज्या के रूप में लेंगे, रेखा A पर एक बिंदु को केंद्र मानकर एक चाप काटेंगे जो रेखा को B पर काटती है (आकृति 6.79 (b))

(a) (b)

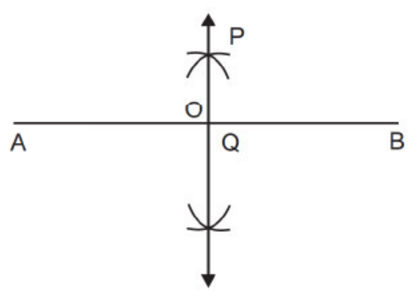
आकृति 6.79

(c) $\overline{AB}$ दिये हुए लम्बाई का रेखाखंड है

(ii) एक रेखाखंड $\overline{AB}$ का लम्बवत समद्विभाजक खींचना :

चरण 1 : परकार में रेखाखंड के आधे से अधिक लम्बाई का त्रिज्या लेते हैं। A को केंद्र मानकर रेखाखंड के दोनों तरफ दो चाप खींचते है। (आकृति 6.80)

चरण 2 : B को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या के दो चाप रेखाखंड $\overline{AB}$ के दोनों ओर पहले से खींचे हुए चाप पर काटते हुए खींचते हैं।



आकृति 6.80

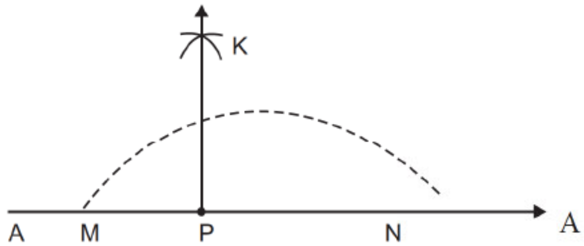
चरण 3 : चरण 2 में प्राप्त चापों के प्रतिच्छेदन बिंदुओं को एक सीधी रेखा खींचकर जोड़ते हैं। इस रेखा का नाम $\overleftrightarrow{PQ}$ दिया गया है। $\overleftrightarrow{PQ}$ रेखाखंड $\overline{AB}$ का लम्बवत समद्विभाजक है।

जांच करे यदि परकार में त्रिज्या की लम्बाई को $\overline{AB}$ की लम्बाई के सटीक आधे या इससे कम लम्बाई की लेते तो क्या होता?

(iii) (a) एक रेखा के दिये हुए बिंदु पर लम्बवत रेखा खींचना :

रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पर बिंदु P पर लम्बवत रेखा खींचना

चरण 1 : बिंदु P को केंद्र मानकर उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप खींचते हैं जो रेखा $\overline{AB}$ को दो बिंदुओं पर काटता है। इन बिंदुओं को M तथा N नाम दिया।



आकृति 6.81

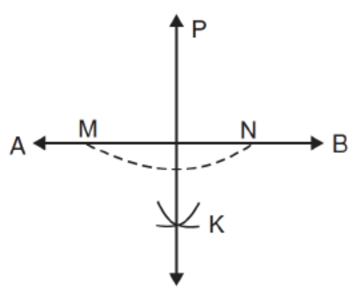
चरण 2 : चरण 1 में लिये गये त्रिज्या से अधिक त्रिज्या लेकर तथा बिंदुओं M और N को केंद्र मानकर दो चाप एक के बाद एक रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के एक ओर खींचते हैं जो एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं। इस प्रतिच्छेद बिंदु को K नाम दिया।

चरण 3 : रेखा $\overleftrightarrow{PK}$ खींचा, $\overleftrightarrow{PK}$ रेखा AB पर वांछित लम्बवत रेखा है $\overleftrightarrow{PK} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(iii) (b) दिये हुए रेखा पर इसके बाहर दिये गये बिंदु से लम्बवत रेखा खींचना रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पर बाह्य बिंदु P से लम्बवत रेखा खींचना $\overleftrightarrow{AB}$ दिया गया रेखा है और बिंदु P इससे बाहर स्थित है।

चरण 1 : बिंदु P को केंद्र मान कर उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप खींचते है जो $\overleftrightarrow{AB}$ को दो बिंदुओं पर काटती है, ये बिंदु M और N है।

चरण 2 : M और N को केंद्र मान कर समान त्रिज्या का प्रयोग करके रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के एक ही ओर खींचे जो परस्पर एक दूसरे को (बिंदु P के दूसरे तरफ) एक बिंदु पर काटते हैं। इस प्रतिच्छेद बिंदु को K नाम दिया। अब रेखा $\overleftrightarrow{PK}$ खींचिये।



आकृति 6.82

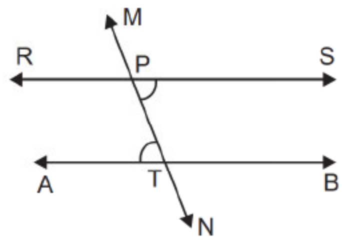
$\overleftrightarrow{PK}$ रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पर लम्बवत रेखा है जो बिंदु P से गुजरता है।

(iii) (c) दिये हुए रेखा के बाहर स्थित बिंदु से गुजरने वाली समांतर रेखा खींचना रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के समांतर रेखा खींचना जो बिंदु P से गुजरती है।

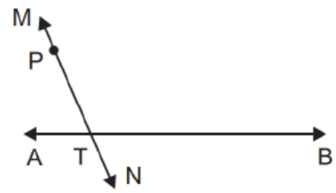
"$\overleftrightarrow{RS}$ वांछित समांतर रेखा है रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के" जिसे खींचना है।

$\overleftrightarrow{MN}$ एक रेखा है, P गुजरता है और रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ को बिंदु T पर काटता है।

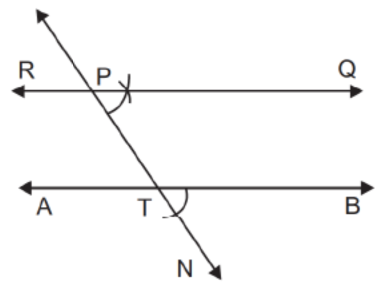
एकांतर कोण $m\angle SPT = m\angle ATP$



आकृति 6.83(a)



आकृति 6.83 (b)

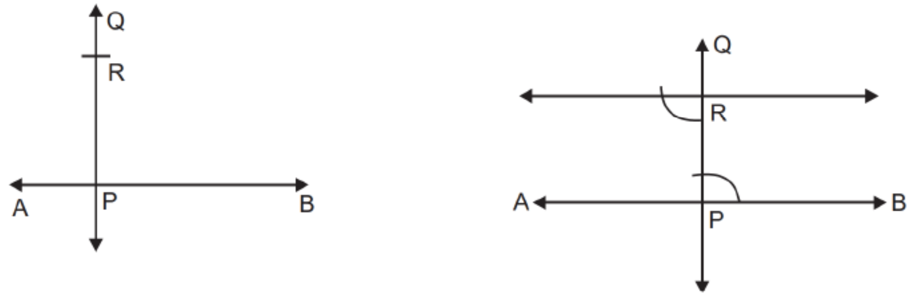


आकृति 6.83 (c)

चरण 1 : एक रेखा MN बिंदु P से गुजरते हुए खींचा जो रेखा AB को बिंदु T पर प्रतिच्छेद करता है।

चरण 2 : एक कोण जो BTN की माप के बराबर है, रेखा PR पर बिंदु P पर बनाया। संरचना (iii) पर की गई चर्चा का अनुसरण किया इस प्रकार रेखा AB के समांतर रेखा RS खींचा जो बिंदु P से गुजरता है।

- एक दिये हुए रेखा से दिये गये दूरी पर एक समांतर रेखा खींचना
  AB दिया गया रेखा है एक दूरी से (5 सेमी.) इसके समांतर रेखा खींचना



(a) (b)

आकृति 6.84

टिप्पणी

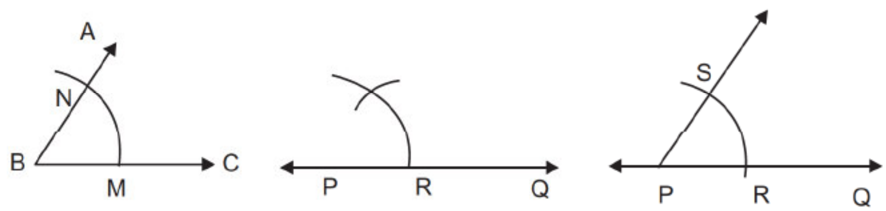
चरण 1 : रेखा पर एक बिंदु लिया। उसे P नाम दिया, P पर एक रेखा खींचा जो रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पर लम्बवत है [iii (a) में इसकी चर्चा की जा चुकी है] इसे $\overleftrightarrow{PQ}$ नाम दिया।

चरण 2 : 5 सेमी का त्रिज्या लेकर तथा P को केंद्र मानकर एक चाप खींचा जो को काटती है उस प्रतिच्छेद बिंदु को R नाम दिया।

चरण 3 : c (iii) में चर्चा की गई विधि का अनुसरण करते हुए $\angle RPB$ की माप के बराबर रेखा पर R पर एक कोण बनाया जो $\angle RPB$ का एकांतर कोण भी हो। खींचे गये कोण भुजा का विस्तार कीजिये यह के वांछित समांतर रेखा देता है जो इससे दिये गये दूरी (5 सेमी) पर स्थित है।

(iv) दिये गये रेखा पर एक बिंदु पर बने कोण की माप के बराबर एक कोण की रचना करना

$\angle ABC$ दिया हुआ कोण है, और दी गई रेखा है।



(a) (b) (c)

आकृति 6.85

एक कोण की रचना करना जिसकी माप $\angle ABC$ के बराबर हो तथा रेखा के बिंदु P पर बना हो।

चरण 1 : परकार में एक उपर्युक्त त्रिज्या लेकर तथा B को केंद्र मानकर एक चाप इस तरह खींचा कि यह चाप रेखा $\overrightarrow{BA}$ और $\overrightarrow{BC}$ को काटता हो उन प्रतिच्छेद बिंदुओं को क्रमश M और N नाम दिया। (आकृति 6.85 (a))

इसी प्रकार एक चाप समान त्रिज्या के और P को केंद्र मानकर एक चाप खींचा जो रेखा $\overrightarrow{PQ}$ को काटती है। प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दिया। (आकृति 6.85 b)

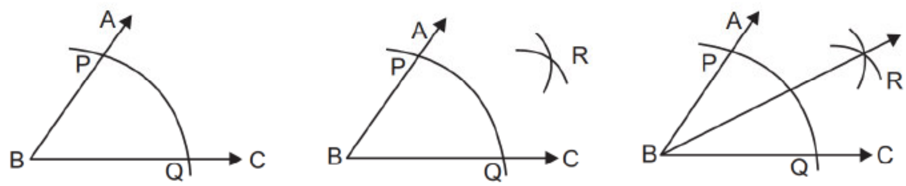
चरण 2 : M और N की दूरी के बराबर त्रिज्या लेकर तथा R को केंद्र मानकर एक चाप इस प्रकार खींचा जो पहले खींचे गये चाप को काटता हो। इस प्रतिच्छेदन बिंदु को S नाम दिया। (आकृति 6.85 c)

टिप्पणी

चरण 3 : किरण $\overrightarrow{PS}$ खींचा। $\angle SPR$ वांछित कोण जिसकी माप की माप के बराबर है।

(v) दिये गये कोण का समद्विभाजक खींचना

दिया गया कोण है इस कोण का समद्विभाजक खींचना है



(a) (b) (c)

आकृति 6.86

चरण 1 : B को केंद्र मानकर तथा एक उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप इस प्रकार खींचा कि यह कोण की भुजा और $\overrightarrow{BC}$ को प्रतिच्छेद करें। प्रतिच्छेद बिंदुओं को P और Q नाम दिया।

चरण 2 : P और Q को केंद्र मानकर और PQ के आधे से अधिक की त्रिज्या लेकर दो चाप इस प्रकार खींचा कि वे दोनों परस्पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दिया।

चरण 3 : किरण $\overrightarrow{BR}$ खींचा, $\overrightarrow{BR}$ $\angle ABC$ का समद्विभाजक है।

इस प्रकार

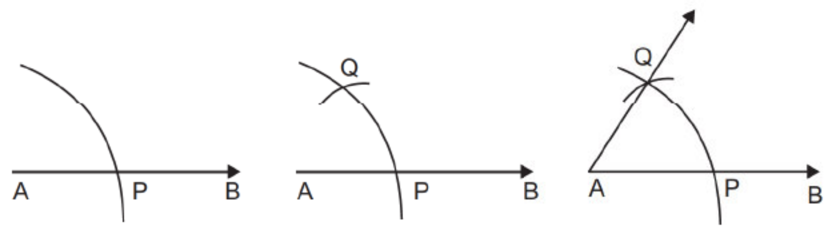
(vi) एक निर्धारित माप की कोण की रचना करना (60° के काण की माप, और इसके गुणकों के कोण की रचना)

(a) एक 60° के कोण की रचना करना :

एक दिया हुआ किरण है, $\overleftrightarrow{AB}$ के ऊपर बिंदु A पर 60° के कोण की रचना करना है।

चरण 1 : A को केंद्र मान कर और उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप इस प्रकार खींचा जो AB को प्रतिच्छेद करे।

इस प्रतिच्छेद बिंदु को P नाम दिया



(a) (b) (c)

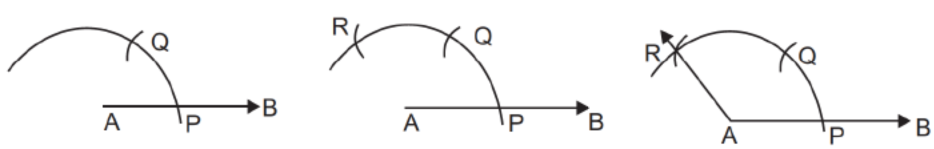
आकृति 6.87

चरण 2 : P को केंद्र मान कर तथा समान त्रिज्या (जैसे चरण 1 में लिया था) लेकर एक एक चाप इस प्रकार खींचा कि वह चरण 1 में खींचे गये चाप को प्रतिच्छेद करें। इस प्रतिच्छेद बिंदु को Q नाम दिया।

चरण 3 : किरण $\overrightarrow{AQ}$ खींचा $\angle QAB$ वांछित कोण है जिसकी माप 60° है

(a) 120^o के कोण की रचना करना

चरण 1 : एक किरण $\overrightarrow{AB}$ खींचा बिंदु A को केंद्र मानकर और उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप इस प्रकार खींचा कि वह किरण $\overrightarrow{AB}$ को काटे इस प्रकार प्राप्त प्रतिच्छेद बिंदु को P नाम दिया।



(a) (b) (c)

आकृति 6.88

चरण 2 : उसी त्रिज्या के बराबर P को केंद्र मानकर एक चाप इस प्रकार से खींचा कि चरण 1 में खींचे गये चाप को प्रतिच्छेद करें। इस प्रतिच्छेद बिंदु को Q नाम दिया। एक चाप Q को केंद्र मानकर खींचा जो चरण 1 के चाप को प्रतिच्छेद करता है, इस प्रतिच्छेद बिंदु को R नाम दिया।

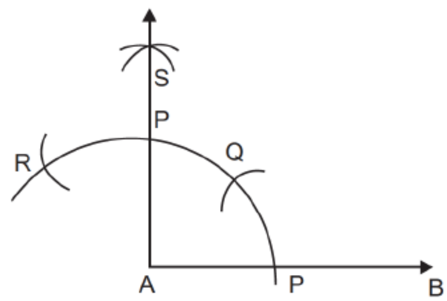
चरण 3 : किरण $\overrightarrow{AB}$ खींचा $\angle RAB$ वांछित कोण है और इसकी माप 120° है।

टिप्पणी

टिप्पणी

(b) 90º के कोण की रचना करना

चरण 1 : किरण पर A को केंद्र मान कर उपयुक्त त्रिज्या लेकर चाप खींचा जो किरण $\overrightarrow{AB}$ को P पर काटता है।



आकृति 6.89

चरण 2 : उसी समान त्रिज्या को लेकर और P को केंद्र मानकर एक चाप खींचा जो पहले खींचे गये चाप (चरण में) को काटता है इस प्रतिच्छेद बिंदु को Q नाम दिया। पुनः Q को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या को लेकर एक चाप खींचा जो पहले चाप को (चरण 1 में) प्रतिच्छेद करता है। इस प्रतिच्छेद बिंदु को R नाम दिया।

चरण 3 : बिंदु P और R को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या को लेकर दो चाप खींचा जो परस्पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं। इस प्रतिच्छेद बिंदु को S नाम दिया।

किरण $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ खींचा $\angle SAB$ वांछित कोण जिसकी माप 90º है।

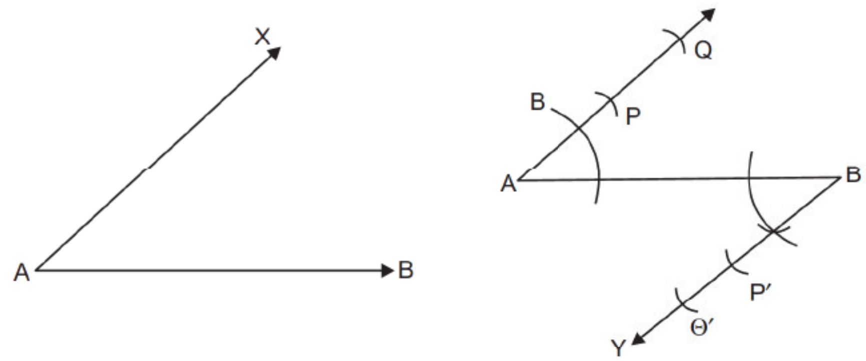
- 45º के कोण की रचना, 90º के कोण को समद्विभाजित करके की जा सकती है।
- $22\,^{1}/_{2}{}^{\circ}$ के कोण की रचना, 45º के कोण को समद्विभाजित करके प्राप्त किया जा सकता है।

E-11 बताइये आप (a) 30º (b) 15º (c) 105º के कोण किस प्रकार खींच सकते है।

(vii) एक दिये हुए रेखा को कई बराबर भागों में विभाजित करना

AB दिया गया रेखाखंड है और उसको 3 बराबर भागों में विभाजित करना है।

टिप्पणी



(a) (b)

आकृति 6.90

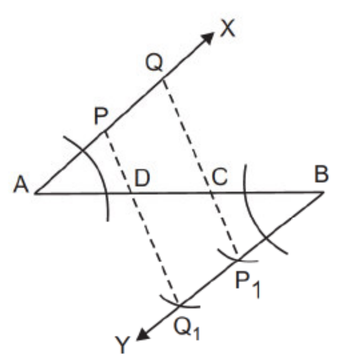
चरण 1 : A को आदि बिंदु मान कर एक किरण खींचा

चरण 2 : $\overrightarrow{AX}$ के समांतर किरण $\overrightarrow{BY}$ खींचा $\angle ABY$ की माप कोण के बराबर है।

चरण 3 : A को केंद्र मानकर तथा उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप खींचा जो को काटता है। प्रतिच्छेद बिंदु को P नाम दिया। P को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या को लेकर एक चाप खींचा जो $\overrightarrow{AX}$ को काटता है। इस प्रतिच्छेद बिंदु को Q नाम दिया। इस प्रकार हमें दो भाग AP और PQ (अर्थात जितने भागों में $\overline{AB}$ को विभाजित करना है उससे 1 कम) उसी त्रिज्या को लेकर $\overrightarrow{BY}$ पर दो चाप खींचकर दो प्रतिच्छेद बिंदु प्राप्त किया और इन्हें नाम दिया P_1 और Q_1 (आकृति 6.90 (c))

$\angle BAX$ $\overrightarrow{AX}$

चरण 4 : $\overline{QP_1}$ और $\overline{PQ_1}$ $\overline{AB}$ को जहां पर काटते है उन बिंदुओं को क्रमशः C और D नाम दिया (आकृति 6.90 (c)) इस प्रकार $\overline{AB}$ को 3 बराबर भागों में बिंदु C और D पर विभाजित करता है।



आकृति 6.90 (c)

टिप्पणी

अपनी प्रगति की जांच करें

E-12 एक रेखाखंड पर लम्बवत समद्विभाजक रेखा खींच कर रेखाखंड को कितने बराबर भागों में विभाजित किया जा सकता है।

E-13 क्या आप लम्बवत समद्विभाजक विधि का इस्तेमाल करके एक दिये हुये रेखाखंड को

(a) 4 बराबर भागों में

(b) 8 बराबर भागों में

(c) 12 बराबर भागों में

विभाजित कर सकते है?

(viii) (a) एक त्रिभुज की संरचना : जब आप रेखाखंड और निर्धारित माप की कोण की रचना करने की समझ और कौशल अर्जित कर लेते हैं तो आप त्रिभुज की रचना रूलर और परकार की सहायता से कर सकते हैं।

त्रिभुज की रचना करने के लिए वांछित न्यूनतम आंकड़े : त्रिभुज के 3 भुजाओं और 3 कोणों में से, एक त्रिभुज की रचना किया जा सकता है जब निम्नांकित प्रतिबंधितों में से कोई एक प्रतिबंध दिया गया हो।

(a) तीनों भुजाओं की लम्बाई (S-S-S)

(b) दो भुजाओं की लम्बाई और एक कोण की माप (S-S-A)

(c) दो भुजाओं की लम्बाई और उनके अंतर्गत बने कोण की माप (S-A-S)

(d) कोई दो कोणों की माप और एक भुजा की लम्बाई (A-S-A) या (A-A-S)

आपने अवलोकन कर सकते हैं कि उपरोक्त प्रतिबंधों के अनुसार एक त्रिभुज की रचना करने के लिए कम से कम 3 भागों की आवश्यकता होगी। इन प्रतिबंधों के आधार पर आप कई त्रिभुजों की रचना कर सकते हैं।

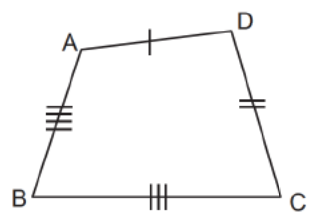
क्रियाकलाप :

एक समकोण त्रिभुज की रचना करने की विधि बताइये जब इसके कोई भी दो भुजाओं की माप दिया हुआ है।

(b) चतुर्भुज की संरचना : एक बार जब आप विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों की संरचना करना सीख जाते है तो चतुर्भुज की रचना करना आपके लिए कठिन नहीं होगा। यह आप जानते है कि प्रत्येक चतुर्भुज को दो बराबर त्रिभुजों में इसके प्रत्येक विकर्णों के द्वारा

विभाजित किया जा सकता है। इसलिए एक चतुर्भुज की संरचना करते समय पहले आप इसके त्रिभुजों की रचना करे उसके पश्चात चतुर्भुज की रचना पूर्ण करें।

उदाहरण के लिए– जब एक चतुर्भुज ABCD के चारों भुजाओं और विकर्ण AC की माप दिया हुआ हो तो आप दो में से कोई भी त्रिभुज की रचना कर सकते हैं जैसे कि त्रिभुज ABC उसके पश्चात आप त्रिभुज ADC की रचना करें। इस प्रकार आपने वांछित चतुर्भुज की रचना को पूरा किया।



आकृति 6.91

इसी प्रकार आप अन्य प्रकार के चतुर्भुजों की संरचना कर सकते हैं:

(a) चारों भुजाओं की लम्बाई दिया हुआ हो

(b) एक सम चतुर्भुज के दो विकर्णो की लम्बाई दिया हुआ हो।

(c) दो कोणों की माप और 3 भुजाओं की लम्बाइ दिया हुआ हो

(d) एक समांतर चतुर्भुज की 2 आसन्न भुजाओं की लम्बाई और एक कोण की माप दिया हुआ हो।

6.6 सारांश

- बिंदु, रेखा और तल समतल ज्यामितीय के तीन अपरिभाषित पद हैं।
- रेखाखंड, किरण, कोण, त्रिभुज और चतुर्भुज आदि आधारभूत पद हैं जिसे अपरिभाषित पदों के इस्तेमाल करके परिभाषित किया गया है।
- आसन्न कोण, संपूरक कोण, पूरक कोण, उध्वधिर सम्मुख कोण युग्म कोणों के उदाहरण है।
- त्रिभुजों को (a) भुजाओं के आधार पर समबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज, विषम बाहु त्रिभुज, (b) कोणों की माप के आधार पर; न्यूनकोण, अधिक कोण, समकोण में वर्गीकृत किया गया है। त्रिभुज के तीनों कोणों के योग 180^o होता है।
- त्रिभुज के संदर्भ में (a) परिमाप = 3 भुजाओं की लम्बाई का योग और (b) क्षेत्रफल = ½ आधार × ऊंचाई

टिप्पणी

- समांतर चतुर्भुज, आयत, समचतुर्भुज, वर्ग और समलम्ब चतुर्भुज विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज हैं। चतुर्भुजों के चारों कोणों का योग 360° होता है।
- वृत्त एक तल पर स्थित बिंदुओं का समूह है जो उस तल पर स्थित एक स्थिर बिंदु से समान दूरी पर स्थित होते हैं। स्थिर बिंदु को वृत्त का केंद्र कहते हैं और केंद्र तथा वृत्त पर किसी बिंदु के बीच की दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं।
- वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखाखंड को जीवा कहते हैं। जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है, प्रत्येक भाग को वृत्त का वृत्तखंड कहते हैं।
- वृत्त की चाप पर अंतरित कोणों की माप बराबर होती है। अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता हैं।
- वृत्त के न्यून चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण, त्रिज्याओं के द्वारा चाप के अंत बिंदुओं को केंद्र से मिलाने से बनता है।
- चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।
- बराबर लम्बाई के रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं जबकि बराबर माप के कोण सर्वांगसम होते हैं। विभिन्न प्रतिबंधों के अंतर्गत (जैसे S-A-S, S-S-S, A-S-A, और RHS त्रिभुजों सर्वांगसम हो सकते हैं।
- सर्वांगसम आकृति समरूप होते हैं परन्तु इसके विपरीत अवस्था सदैव सत्य नहीं होता है। दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनके संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपातिक होते है।
- ज्यामितीय में परावर्तन दर्पण में परावर्तन के समान होता है। परावर्तन आकृतियों में सममिति उत्पन्न करता है।
- समतल आकृतियों के क्षेत्रफल की गणना करने के लिए सूत्रों का इस्तेमाल करके त्रिविमीय आकारों जैसे घन, घनाभ, बेलन, शंकु, प्रिज्म और पिरामिड का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है।
- केवल रूलर और परकार का इस्तेमाल करके निम्नांकित आकृतियों की रचना की जा सकती है।

  (i) किये हुये लम्बाई का रेखाखंड खींचना

  (ii) दिये हुये रेखाखंड का लम्बवत समद्विभाजक की रचना

  (iii) दिये हुये त्रिज्या का वृत्त की रचना

  (iv) दिये हुये किरण पर दिये हुये बिंदु पर दिये गये कोण की माप के बराबर एक कोण की रचना

  (v) एक दिये हुये रेखा के समांतर/लम्बवत रेखा खींचना

(vi) दिये हुये कोण का समद्विभाजक रेखा खींचना

(vii) 60° के कोण और इसके गुणक वाले कोण

(viii) बंद ज्यामितीय आकृतियां जैसे त्रिभुज, और चतुर्भुज और वृत्त

6.7 अपनी प्रगति की जांच करें

E1. $92\frac{1}{2}^{\circ}$

E2. 108°, 108°, 72°

E3. (i) $\angle ACQ, \angle CDS$, (ii) (iii)

E4. a = c = f = h = 145^{0}, e = d = b= 35^{0}

E-5 (a) सम चतुर्भुज (b) केंद्र (c) 32° (d) 180°

E-6 (a) लम्बाई (b) माप (c) संगत (d) आकार

E-7 PR = 12 सेमी.

E-8 :

$\Delta PQR, \angle CDR$ E-9 63 सेमी.

E-10 आयतनों का अनुपात होगा 3:2

E-11 (a) 60° कोण का समद्विभाजक खींचकर

(b) 30° कोण का समद्विभाजक खींचकर

(c) $\angle ABC = 90^{\circ}, \angle CBD = 120^{\circ}$, की रचना करके, उसके पश्चात BE खींचिये समद्विभाजक , खींचकर, $= 105^{\circ}$

E-12 2 बराबर भाग

E-13 (a) हां (b) हां (c) नहीं

E-14 (a) नहीं (b) हां (c) नहीं (d) हां

6.8 संदर्भित सामग्री

गणित पाठ्यपुस्तक कक्षाओं V से VIII NCERT DELHI

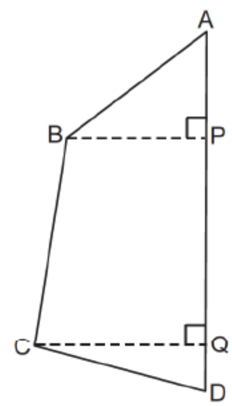
6.9 इकाई-अन्त्य अभ्यास

1. रूलर और परकार का इस्तेमाल करके, संलग्न आकृति के आकार की रचना निम्नांकित मापों के अनुसार करे

   AP = 3 सेमी BP = 4 सेमी. BC = 7 सेमी

   PQ = 5 सेमी QD = 2 सेमी. और $\overline{CQ} \perp \overline{AD}$

   $\overleftrightarrow{AD}$ को समयित रेखा मानकर एक आकृति की रचना करें।



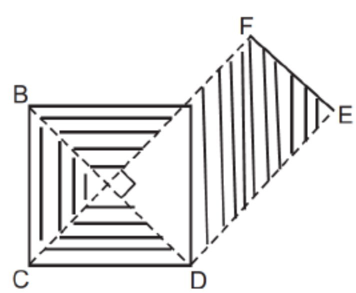
आकृति 6.92

2. संलग्न आकृति में

   AC = BD = PF = DE = 8 सेमी.

   $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle BDE$ और

   प्रत्येक समकोण है।



आकृति 6.93

सेटस्क्वेयर और स्केल का इस्तेमाल करके दिये हुये मापों के अनुसार आकार खींचिये

छायांकित क्षेत्रों (को छोड़कर) का क्षेत्रफल ज्ञात करके तुलना करें।

टिप्पणी

3. नीचे दिये टेबल के रिक्त स्थानों को भरिये

आकार	घूर्णन का केंद्र	सममिति का क्रम
सम चतुर्भुज		
समबाहु त्रिभुज		
समबाहु षष्ठभुज		
वर्ग		

4. 20 सेमी. लम्बी तार का टुकड़ा लेकर उसे निम्नांकित टेबल में निर्दिष्ट विभिन्न लम्बाई के आयतों में मोड़िये। प्रत्येक स्थित में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करके टेबल को पूरा करें।

आयत की लम्बाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
8 सेमी.		
7 सेमी.		
6 सेमी.		
5 सेमी.		

5. नीचे 3 मापों का सेट दिया गया है। इनमें से किसको 3 भुजाओं की लम्बाई के रूप में लेकर एक त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

   (a) 5.5 सेमी., 6.8 सेमी. और 7.2 सेमी.

   (b) 4.7 सेमी., 5.3 सेमी., और 10.0 सेमी.

   (c) 8.0 से.मी. 7.5 से.मी. और 9.2 सेमी.

   (d) 5.8 सेमी. 12.2 सेमी. और 6.0 सेमी.

6. रूलर और परकार का इस्तेमाल करके 52.5° माप की कोण की रचना करने में दिये गये माप का विभाजन किस प्रकार होना चाहिए?

टिप्पणी

इकाई-7 माप और मापन

संरचना

7.0 परिचय

पूर्व की इकाईयों में हम पहले ही चर्चा कर चुके हैं कि हमारे आसपास की प्रत्येक भौतिक वस्तु के दो गुण होते हैं, आकार और रूप। आकार यह बताता है कि वस्तु दिखती कैसी हैं? हम कहते हैं ''यह वृत्त की तरह दिखाई देती है।''। यहां वृत्त शब्द रूप के बारे में बताता है। इसी प्रकार किसी मंदिर के सामने बने पत्थर की मूर्ति को देखते हैं तो कहते हैं 'यह पत्थर से बना शेर है'। यहां पर शेर शब्द वस्तु के रूप के बारे में बताता है। परन्तु जब हम कहते हैं कि किसी पृष्ठ पर खीचा गया वर्ग बहुत बड़ा है तो बड़ा शब्द आकार के बारे में बताता है। समुद्र के किनारे बना प्रकाश स्तम्भ काफी ऊंचा है, यहां ''काफी ऊंचा'' प्रकाश स्तम्भ के आकार के बारे में बताता है।

टिप्पणी

निम्नांकित कथनों पर विचार करें

"सर्कस के दो जोकरों में से एक बहुत बड़ा है और दूसरा बहुत ही छोटा है।

क्या हम जोकर के छोटेपन के विस्तार को बता सकते हैं? क्या हम जोकर के विशालता के विस्तार के बारे में कुछ कह सकते हैं? सटीकता के साथ नहीं कह सकते हैं।

एक वस्तु का वह गुण जो हमें उसकी विशालता या छोटेपन को जानने में हमारी सहायता करता है वह उसकी माप है।

विभिन्न वस्तुओं के एक ही प्रकार के गुणों का एक निश्चित माप होता है और अन्य गुणों जो कि चर्चा किये गये गुणों से भिन्न है, कि माप भी भिन्न-भिन्न होती है। उदाहरण के लिए एक आकृति एक समतल पर कितना जगह घेरती है वह उसके क्षेत्रफल की माप है जबकि एक ठोस वस्तु को पानी से भरे बर्तन में डुबाने पर जितना पानी हटता है वह उसकी आयतन की माप है।

इस इकाई में हम विभिन्न प्रकार के मापन, उन मापनों की इकाई और पैमानों तथा विभिन्न भौतिक वस्तुओं के विभिन्न आयामों को मापने के तरीके के बारे में चर्चा करेंगे।

इस इकाई का अध्ययन करने में आपको लगभग 7 घंटे का समय लगेगा।

7.1 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप सक्षम होंगे

- वस्तुओं के विभिन्न पहलुओं के मापन की इकाइयों और उनके मापन विधियों के बारे में जानकारी प्राप्त करने में।
- दैनिक जीवन की विभिन्न क्रियाकलापों में मापन की विभिन्न इकाईयों के उपयोग करने में
- लम्बाई, क्षेत्रफल, आयतन, धारिता, भार और समय से संबंधित गणना करने में।

7.2 मापन और माप

सभी मापन से परिचित है, हमारे दैनिक जीवन में हमें एक वस्तु या दूसरी वस्तु या चीज को मापने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरण के लिए कमीज बनाने के लिए आवश्यक कपड़े की लम्बाई नापना, बाजार से सब्जी या किराने की दुकान से सामान खरीदते समय उनका वजन तौलना, पानी की मात्रा जिसे एक व्यक्ति प्रतिदिन पीता हो, एक कक्षा के बच्चों की ऊंचाई और वजन ज्ञात करना, घर से विद्यालय पहुंचने तक लगा समय, कक्षा-कक्ष या घर के कमरे का आकार, विद्यालय के बगीचे का क्षेत्रफल, आपके शरीर का तापमान आदि इन सभी स्थितियों

टिप्पणी

में हम कुछ माप कर रहे है। इन स्थितियों में मापन का अर्थ उनके गुणों को मात्रात्मक रूप में व्यक्त करना है जिसे किसी इकाई से तुलना की जा सकती है। दूसरों शब्दों में मापन आकार का परिमाणन करना है या वस्तु के आकार का निश्चित पहलुओं जैसे लंबाई, आयतन का परिमाणन करना है।

मापन संख्याओं का अनुप्रयोग करना है, और बच्चों के लिए सहायक है जिसके द्वारा बच्चे यह जान पाते हैं कि गणित दिन प्रतिदिन के जीवन में उपयोगी है और कई गणितीय अवधारणाओं और कौशलों का विकास करता है।

प्राथमिक कक्षाओं में बच्चों को कई प्रकार के मापन के बारे में सीखना आवश्यक है। लम्बाई क्षेत्रफल, आयतन, समय के मापन को प्राथमिक विद्यालय के पाठ्यक्रम में शामिल किया गया है। परन्तु 7 से 9 वर्ष के बच्चों के लिए ये अमूर्त लगता है। इसलिए एक अध्यापक के रूप में आप बच्चों को इन अवधारणाओं से परिचित करायें।

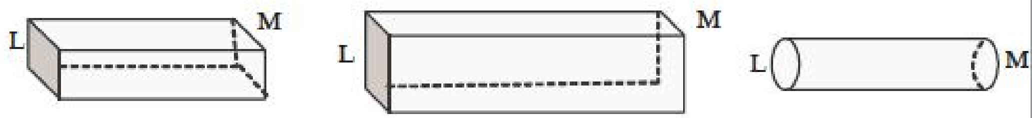
एक बच्चा अपने आसपास के वातावरण को अनुभव करने के प्रारम्भिक अवस्था से त्रिआयामी ठोस वस्तुओं से परिचित है जैसे फल, खिलौने, रंगीन ब्लाक, घनों, घनाभ, माचिस की डिब्बी, बेलनाकार ठोस जैसे चाक, बेलन आदि त्रिआयामी वस्तुओं को व्यवस्थित या प्रबंध करके द्विआयामी वस्तुओं के बारे में जानकारी प्राप्त करता है। घन या घनाभ को व्यवस्थित या प्रबंध करने से या इन वस्तुओं को समतल कागज पर आरेखित करने से विद्यार्थी उसके तलों को पहचानता है और यह भी पहचानता है कि इसे किसी टेबल के तल पर फैलाया जा सकता है। त्रिआयामी वस्तुओं के तलों का अवलोकन करके या द्विआयामी तल पर प्रदर्शित करके (जैसे त्रिआयामी वस्तुओं को द्विआयामी तल पर आरेखित करना) बच्चा द्विआयामी की विशेषताओं को अनुभव करता है। आगे त्रिआयामी ठोसों के किनारों का अवलोकन करके और द्विआयामी आकृति की भुजाओं का अवलोकन करके और कुछ वस्तुओं जैसे पतला धागा, तार के अवलोकन विद्यार्थियों को एक आयामी वस्तुओं के बारे अनुभव प्राप्त होता है।

बच्चों को विभिन्न वस्तुओं को उनकी समानता/विशेषताओं के आधार पर अलग-अलग समूह में रखने के लिए क्रियाकलापों में और 3-D और 2-D वस्तुओं की रेखाकृति बनाने में संलग्न करके आप उन वस्तुओं की विमाओं संबंधी प्रत्यय को सशक्त करने में मदद कर सकते हैं। ऐसे क्रियाकलापों से, विद्यार्थी एक विमीय वस्तुओं से एक अंकीय अर्थात् लम्बाई से सम्बद्ध, द्विविमिय वस्तुओं से द्विअंकीय अर्थात् लम्बाई तथा चौड़ाई से सम्बद्ध, और त्रिविमिय वस्तुओं से लम्बाई, चौड़ाई, और ऊंचाई (मोटाई) से संबंद्ध अवधारणा का निर्माण कर पायेंगे। विद्यार्थियों को इस प्रकार के क्रियाकलापों में विभिन्न प्रतिरूपों, विभिन्न आकृतियों और आकारों के साथ संलिप्त करने से विद्यार्थियों की लम्बाई, क्षेत्रफल, आयतन और उनके मापन के प्रति समझ को विकसित करने में सहायता मिलेगी।

निम्न मापक (मानक इकाई) जो कि साधारणत: प्रयोग किये जाते हैं तथा जिन्हें प्राथमिक विद्यालय के विद्यार्थी विभिन्न क्रियाकलापों तथा वास्तविक जीवन के अनुभवों से अनुभूत कर सकता है। अगले खण्ड में, हम इन्हीं मापकों की विस्तार से चर्चा करेंगे।

टिप्पणी

1. **दूरी मापक :** लम्बाई, चौड़ाई, ऊंचाई, त्रिज्या सभी दूरी मापक हैं। ये सभी दो बिंदुओं के मध्य की दूरी को प्रदर्शित करते हैं।



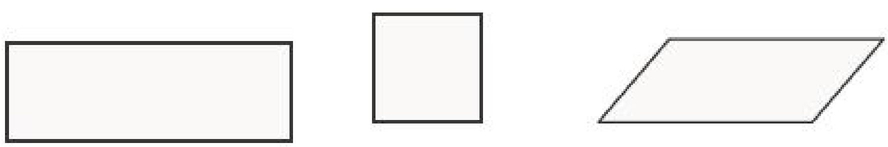
(a) (b) (c)

आकृति 7.1

आकृति 7.1 में प्रदर्शित सभी लकड़ी के गुटकों में 2 सिरे (छोर) L तथा M हैं। तथा दोनों सिरों के बीच कुछ दूरी है। आकृति 7.1 (C) मे (छोरों) L तथा M के मध्य की दूरी शेष दो (a) तथा (b) में प्रदर्शित L तथा M की मध्य की दूरी से अधिक है।

इस प्रकार दो किनारों के मध्य की दूरी का गुण सभी लकड़ी के गुटकों में समान रूप से प्रदर्शित है। यह 'लम्बाई मापक' नाम से जाना जाता है।

2. **क्षेत्रफल-मापक**–प्रत्येक द्विविमीय (द्वि-आयामीय) आकृति किसी भी तल पर कुछ न कुछ क्षेत्र घेरती है। घिरे हुए क्षेत्र की माप 'क्षेत्रफल मापक' के रूप में जानी जाती है।



(a) (b) (c)

आकृति 7.2

उपरोक्त प्रत्येक आकृति में पृष्ठ का कुछ भाग घेरा हुआ है। इस प्रकार प्रत्येक द्वि-विमीय आकृति का 'क्षेत्रफल मापक' होता है।

3. **आयतन मापक :** 3D वस्तुएं आकाश का एक भाग घेरती हैं। वस्तु द्वारा आकाश के घेरे गये विस्तार का माप 'आयतन मापक' होता है। एक 3D पदार्थ (वस्तु) (जो कि पानी में विलय नहीं है) पानी में डुबोये जाने पर पानी को कुछ मात्रा में विस्थापित करती है। विस्थापित पानी (जल) की मात्रा उस वस्तु के 'आयतन की माप' होती है।

4. **भार मापक :** जब हम किसी पदार्थ या वस्तु को ले जाते या भूतल से उठाते हैं, तब हमें कुछ परिस्थितियों में, अधिक श्रम नहीं करना पड़ता, जबकि कुछ स्थितियों में हमें अधिक श्रम करना पड़ता है। 3D वस्तुएं उन्हें भूमि की ओर बल द्वारा खींचे जाने का प्रदर्शन करती हैं। भूमि की 3D वस्तुओं को अपनी ओर खींचने वाले बल की अधिकता अथवा न्यूनता वस्तु के 'भार मापक' को प्रदर्शित करती है।

टिप्पणी

5. **समय-मापक :** कोई घटना दिन में कब घटित होती है? हम एक कार्य कब तक पूर्ण करते है? ऐसे प्रश्नों के उत्तर के लिये हमें 'समय मापक' से परिचित होने की आवश्यकता पड़ती है।

एक जैसी वस्तुओं का तुलनात्मक मापन :

– नरेश कक्षा छठी के विद्यार्थियों की, विद्यालय में, बागवानी के लिये क्यारी तैयार करने में मदद कर रहा था। समूह ने क्यारी की सीमाओं को चिह्नित किये जाते समय यह निश्चय किया कि विद्यालय परिसर को एक ऐसे आयताकार परिसर से घेरा जायेगा कि क्यारी की लम्बाई, चौड़ाई की माप की दोगुनी होगी। जबकि कुछ विद्यार्थी लम्बाई मापने के लिये यंत्र ढूंढ रहे थे, नितिन ने दो बालिश्त (cubits) लम्बाई की माप की छड़ी से दो छड़ी की लम्बाई जितनी एक ओर तथा चार छड़ी की लम्बाई जितनी पास की ओर से माप कर क्यारी को तैयार कर पूरा कर दिया।

– यह सोमवार था, और आज कक्षा V के विद्यार्थियों को निकट के ट्यूब वैल से पीने का पानी लाकर पानी के टैंक को भरना था। उन्हें केवल एक छोटी बाल्टी टैंक को भरने के लिये दी गयी थी। उन्होंने पाया कि पानी का टैंक 18 बाल्टी पानी से भर गया।

हम मापन के उपरोक्त दो उदाहरणों का परीक्षण करते हैं। प्रथम उदाहरण में, भूमि पर क्यारी निर्माण के लिये भुजाओं या किनारों की लम्बाई की माप के लिये छड़ी का प्रयोग किया गया। दूसरे शब्दों में, क्यारी के किनारों की लम्बाई की तुलना छड़ी की लम्बाई से की गई और विशेषता यह है कि क्यारी की एक भुजा (किनारे) की लम्बाई समीप के दोगुनी लम्बाई वाली भुजा से जुड़ी है। दूसरे उदाहरण में, टैंक की धारिता की तुलना दी गई बाल्टी की धारिता से की गई है। क्या आप बाल्टी के द्वारा क्यारी की लम्बाई या छड़ी द्वारा पानी के टैंक की धारिता का मापन कर सकते हैं?

इन उदाहरणों से आप यह जान सकते हैं कि 'मापन' दो समान वस्तुओं की तुलना की प्रक्रिया है। क्यारी की लम्बाई या चौड़ाई का मापन किसी (एक) अन्य वस्तु जिसकी लम्बाई पूर्व निर्धारित हो यथा मीटर, पैमाना, या एक पूर्व निर्धारित लम्बाई की किसी छड़ द्वारा भी किया जा सकता है। इसी प्रकार बर्तन का आयतन मापने के लिए अन्य ज्ञात मापक यथा लीटर या बोतल या बाल्टी जिसकी धारिता पूर्व निर्धारित है, से तुलना की जा सकती है। ज्ञात हो कि मीटर पैमाना तथा लीटर समान मापक नहीं हैं। इन का परस्पर परिवर्तित रूप में प्रयोग नहीं किया जा सकता।

दो समान वस्तुओं की परस्पर तुलना करने के लिये सामान्तया: एक अथवा एक से अधिक अधोलिखित पांच प्रक्रियाओं का प्रयोग किया जा सकता है।

(a) अवलोकन द्वारा

(b) किसी वस्तु को दूसरी वस्तु पर अध्यारोपित कर

(c) अप्रत्यक्ष विधि द्वारा

(d) अमानक इकाई के प्रयोग द्वारा और

टिप्पणी

(e) मानक इकाई के प्रयोग द्वारा

अन्तिम दो विधियों की चर्चा अलग से अगली इकाइयों में की जायेगी। अभी हम समान वस्तुओं के तुलनात्मक मापन की प्रथम तीन विधियों के प्रयोग का अध्ययन करते हैं।

आप इस क्रिया कलाप को कक्षा I या II के विद्यार्थियों के साथ कर सकते हैं। उन्हें विभिन्न रंग तथा विभिन्न लंबाई की 10 छड़ें देकर उन से इन छड़ों को लम्बाई के बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करने को कहा जाता है। आप पाते हैं कि अधिकांश विद्यार्थियों ने साधारण तुलना कर अधिक लम्बाई की छड़ से कम लम्बाई की छड़ के क्रम में व्यवस्थित कर लिया है। इसी प्रकार आप विभिन्न आकार के पांच पत्थरों को अधिक भारी से कम भारी पत्थर के क्रम में व्यवस्थित किये जाने का प्रदर्शन कर सकते हैं। आप पायेंगे कि विद्यार्थियों ने इस कार्य को बहुत सरलता से तथा बहुत शीघ्र पूर्ण कर लिया। ये साधारण अवलोकन विधि द्वारा मापन के उदाहरण हैं।

कक्षा में अध्यापक दो रंगीन पट्टियां विद्यार्थियों को दिखा रहे हैं, लाल पट्टी दाहिने हाथ में तथा हरी पट्टी बांयें हाथ में रखकर पूछते हैं कि किस पट्टी की लम्बाई अधिक है। कुछ विद्यार्थी लाल रंग की पट्टी को अधिक लम्बा बताते हैं तो कुछ हरे रंग की पट्टी की लम्बाई अधिक बताते हैं। यदा कदा केवल अवलोकन विधि के द्वारा ही मापन के सही परिणाम नहीं मिलते। तभी अध्यापक पूछते हैं ''आपने कैसे जांच की कौन सी पट्टी अधिक लम्बी है?'' एक विद्यार्थी एक पट्टी को दूसरी पट्टी पर अध्यारोंपित (रखने) का प्रस्ताव (सुझाव) देता है। जब ऐसा किया जाता है, हरी पट्टी की लम्बाई को लाल पट्टी की लम्बाई से अधिक पाया जाता है।

कुछ स्थितियां ऐसी होती हैं जहां अवलोकन या अध्यारोपण विधि का प्रयोग तुलनात्मक मापन के लिये सम्भव नहीं है। उदाहरण के लिये, एक पतला गिलास तथा एक चौड़ा गिलास जिनकी ऊंचाई भी परस्पर भिन्न है, लेकर पूछते हैं किसकी धारिता अधिक है। एक गिलास को पानी से पूरा भर कर दूसरे गिलास में पलटना मापन की एक विधि हो सकती है। यदि पहले गिलास के पानी को दूसरे गिलास में पूरा पलट कर खाली कर दिये जाने के बाद भी दूसरा गिलास यदि पूरा नहीं भर पाता है, तो निष्कर्ष निकालते हैं कि दूसरे गिलास की धारिता पहले गिलास से अधिक है।

7.3 अमानक तथा मानक मापक

किसी भी प्रकार का मापक सदैव किसी अंक से सम्बद्ध रहता है, अंक ही वह माध्यम है जिस के द्वारा बड़े अथवा छोटे की अभिव्यक्ति होती है। मापक से सम्बद्ध अंक तुलना से प्राप्त होता है। उदाहरण के लिये, आकृति 6.1 (a) में दिये गये गुटके की लम्बाई को अंक से सम्बद्ध करने के लिये हमें अन्य किसी वस्तु की लम्बाई की आवश्यकता होती है। इसीलिये अवलोकन द्वारा लम्बाई की तुलना करने के लिये किसी विशिष्ट लम्बाई की वस्तु का चयन किया जाता है। वह विशिष्ट लम्बाई एक इकाई लम्बाई कहलाती है। उस वस्तु की लम्बाई और इकाई लम्बाई के अनुपात का अंक ही वस्तु की लम्बाई को अभिव्यक्त करता है।

टिप्पणी

इसी प्रकार इकाई क्षेत्रफल, इकाई आयतन/धारिता, और इकाई भार भी क्रमशः क्षेत्रफल, आयतन/धारिता तथा भार के मापन के लिये प्रयोग किये जाते हैं। इनमें से प्रत्येक मापक इकाई का प्रयोग पदार्थ के विशिष्ट गुण की माप के लिये किया जाता है। ये इकाइयां स्थिति तथा आवश्यकता के अनुरूप परिवर्तित की जा सकती है। नीचे दिये गये उदाहरणों से यह अधिक स्पष्ट हो सकता है।

खिड़की पर पर्दा लटकाने वाली रॉड को टूट जाने के कारण, बाजार से खरीद कर बदले जाने की आवश्यकता है। बाजार से सही लम्बाई की रॉड लाने के लिये आप क्या करेंगे? निम्न क्रियायें संभव हो सकती हैं।

1. टूटी हुयी रॉड को दुकान पर ले जाकर समान लंबाई की दूसरी रॉड की खरीद करना।
2. रॉड की लम्बाई की माप किसी अन्य छड़ी से की जा सकती है, और इस छड़ी के द्वारा जांची गई अपेक्षित लम्बाई की दूसरी रॉड की खरीद करना।
3. आप अपने 'पैर' की सहायता से रॉड को माप सकते हैं, और रॉड की लम्बाई ''कितने पैर की लम्बाई के बराबर है?'' का निर्धारण कर सकते हैं। और इसी समान लम्बाई की रॉड प्राप्त कर सकते हैं।
4. रॉड की लम्बाई के समान लम्बाई का धागा काट सकते हैं और इसी प्रकार आप धागे की लम्बाई के समान माप की रॉड प्राप्त कर सकते हैं।
5. रॉड की आवश्यक लम्बाई के निर्धारण के लिये आप मीटर पैमाने का प्रयोग कर सकते हैं।

उपरोक्त सुझाये गए समाधानों में 2, 3 तथा 4 व्यक्ति या स्थिति विशेष पर निर्भर है तथा माप लेने वाले व्यक्ति पर परिणाम निर्भर होंगे। ये अमानक इकाई द्वारा मापन के उदाहरण हैं, अगले खंड में इसी प्रकार के मापन द्वारा वस्तु के विभिन्न गुणों के मापन की चर्चा होगी। इन मापकों के विपरीत, 'मीटर पैमाना' एक मानक मापक है जिसे विश्व के सभी देशों में प्रयोग किया जाता है। मीटर पैमाने की लम्बाई निश्चित होती है और यह व्यक्ति या स्थिति या समय पर निर्भर नहीं करती है। इस प्रकार, यह एक लम्बाई मापन की मानक इकाई का उदाहरण है।

मानक इकाईयां पूरे विश्वभर में अभी लोगों के द्वारा सरलता से समझी जाती हैं और तुलनात्मक रूप से प्रयोग में सरल होती हैं। मानक इकाईयां, यद्यपि तर्क आधारित नहीं हैं, इनका प्रसार सामान्य स्वीकृति के साथ (से) तथा वैज्ञानिक परिशोधन द्वारा लम्बे समय में हुआ है। इसीलिये इन इकाइयों को लगभग पूर्ण रूप से एकदम सही मापक माना जाता है। उप-इकाईयां (जैसे-सेंटीमीटर, और मिलीमीटर, मीटर की उपइकाइयां हैं) और मिश्र इकाईयां (जैसे–किलोमीटर, मीटर की मिश्र इकाई है) बहुत अच्छी तरह से परिभाषित मानक इकाइयां हैं, जबकि ऐसा अमानक इकाईयों के साथ नहीं होता है।

मापन की अमानक इकाईयों का विकास कुछ सीमित तथा तुरन्त आवश्यकता पूर्ति करने के लिये हुआ है। यदि आप खीर बना रहे हैं, तब आप चावल, चीनी और दूध के मापन के लिये सदैव आदर्श नियमावली का पालन नहीं करते हैं। आप अपने पूर्व अनुभव के आधार पर मुट्ठी भर

टिप्पणी

चावल, पांच चम्मच चीनी और दो गिलास दूध लेते हैं, और तब भी खीर उतनी ही स्वादिष्ट बनती है जितनी कि आदर्श नियमावली का पालन कर संघटकों की माप कर मिलाने से। ये अमानक मापक आपके निजी प्रयोग के लिये अच्छे हो सकते हैं, किन्तु किसी अन्य दूसरे व्यक्ति के लिये उतने ही अच्छे नहीं हो सकते जिसकी आवश्यकतायें आप से भिन्न हैं।

किसी स्थान या समुदाय में सामान्य सहमति से कुछ इकाईयों का लम्बाई, भार, क्षेत्रफल और आयतन की माप के लिये लम्बे समय से उपयोग किया जाता रहा है। ये स्थान या समुदाय या संस्कृति की मानक मापक इकाईयां होती हैं। आपको ऐसी इकाईयां प्रत्येक संस्कृति में मिल सकती हैं। ऐसी इकाईयां किसी एक संस्कृति तक सीमित होती हैं और संभव है कि ये दूसरी संस्कृति के लिये बोधनीय न हो।

क्रियाकलाप : 1

मापन के लिये आपके आस पास में प्रयोग किये जाने वाले अमानक इकाईयों की सूची तैयार करो। प्रत्येक इकाई की उसके समतुल्य मानक इकाई से तुलना, अमानक इकाई के प्रयोग के लाभ तथा इसके प्रयोग की सीमाओं का स्थानीय लोगों के दृष्टि कोण से वर्णन करो। अपनी प्रगति की जांच/आपने क्या सीखा?

....

....

....

E-1 मापन की मानक तथा अमानक इकाईयों में कोई तीन विभिन्नताएं बताइये।

E-2 मापन की मानक इकाईयों की क्या आवश्यकता है?

क्रियाकलाप : 2

धागे/डोरी का प्रयोग करते हुए अपनी कलाई तथा गर्दन की चारों ओर की दूरी (गोलाई/मोटाई) की माप लो। गर्दन की मोटाई, कलाई की मोटाई का कितने गुना है? अपने सहपाठियों की गर्दन, कलाई की मोटाई से अपनी गर्दन, कलाई की मोटाई तथा उनके बीच के अनुपात की तुलना करो।

....

....

....

टिप्पणी

क्रियाकलाप : 3

वर्गाकार कागज पर कई विभिन्न आयत बनाइये। उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये नियम बताइये, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई दी गयी है।

मानक इकाईयों के लाभ के बावजूद, मापन सीखने की प्रारंभिक अवस्था में अमानक इकाइयों के प्रयोग की आवश्यकता होती है। इस प्रकार की इकाइयों की अच्छी जानकारी होने के कारण बालक तुलना के विभिन्न माध्यमों को जान पायेंगे और धीरे-धीरे वे मानक इकाइयों की आवश्यकता को समझ सकेंगे।

अमानक इकाइयों की मुख्यत: दो श्रेणियां हैं। इकाइयों की एक श्रेणी में व्यक्ति के सापेक्ष (अनुसार) विविधता होती है जैसे–हाथ की माप या बालिस्त आप इस प्रकार की इकाइयों का प्रयोग कक्षा को किसी वस्तु की लम्बाई की माप करने में कर सकते हैं (जैसे मेज की लम्बाई मापना)। आप विद्यार्थियों से उनकी हथेली और अंगुलियों को इकाई मानकर मापन के लिये कह सकते हैं। विभिन्न विद्यार्थियों द्वारा मापित लम्बाई को आप सूचीबद्ध कर नोट कर सकते हैं।

....

....

....

अनुमान और मापन :

विद्यार्थियों से मेज के किसी सिरे (किनारे) की लम्बाई बिना वास्तविक मापन किये हुए हाथ या छड़ी की माप इकाई के गुणज में बताने को कहें। उन्हें उनके द्वारा अनुमानित और आकार के अनुमान की शुद्धता का बोध करने दें। उन्हें किसी पौधे की लम्बाई का अनुमान करने, या बाल्टी की धारिता का दिये हुए मग की इकाई धारिता में अनुमान लगाने के लिये कहा जा सकता है। वस्तुओं की माप करने का अनुमान उन्हें भविष्य में किस प्रकार सहायता करता है?

मापन में अनुमान एक महत्वपूर्ण भूमिका का निर्वाह करता है। यह विद्यार्थियों द्वारा मापन में की जाने वाली त्रुटियों को पहचानने तथा निष्कासन करने में सहायता करता है। वास्तविक मापन से पूर्व मापन के अनुमान की आदत का निर्माण का गुण विद्यार्थियों को उचित इकाई चयन में, मापन की चयनित इकाई के गुणों की मानसिक तुलना में सहायता करता है और इस प्रक्रिया द्वारा मापन को विद्यार्थी के लिये और अधिक शुद्ध तथा सार्थक बनाता है।

किसी वस्तु के विशिष्ट गुण के वास्तविक मापन से पहले विद्यार्थियों से अनुमानित मापन को कहा जाये क्योंकि वे तब ही मापन के परिणाम में मिले अंकों का अभिप्राय समझ पायेंगे। उदाहरण के लिये–यदि एक बालक एक डेस्क की लम्बाई (जो कि वास्तव में 37 से.मी. है) मीटर पैमाना उल्टी दिशा में पढ़ कर 63 सेमी मापता है, वह तुरन्त ही अपनी त्रुटि का बोध कर लेता है क्योंकि उसने पूर्व में इस लम्बाई का अनुमान लगभग 40 सेमी किया होता है।

टिप्पणी

अपनी प्रगति की जांच/आपने क्या सीखा?

E-3 मापन सीखने की प्रारंभिक अवस्था में अमानक इकाइयों के दो लाभ बताइये।

E-4 आकार के अनुमान की योग्यता के लाभ को दो उदाहरणों द्वारा समझाइये।

7.3.1 लम्बाई मापन

जैसा कि पहले चर्चा की गई है, कि मापन सीखने का प्रारंभ अच्छी तरह जानी पहचानी अमानक इकाईयों से मापन के साथ होता है। जब विद्यार्थी अमानक इकाईयों के साथ मापन सीख रहे होते हैं तब उन्हें अनुमान करने तथा उचित प्रकार से इकाइयों के प्रयोग करने को प्रोत्साहित किया जाना चाहिये।

विद्यार्थी के निकट के पर्यावरण से ही बहुत सी वस्तुओं का लम्बाई माप की अमानक इकाईयों के रूप में (जैसे–घड़ी, तार, धागा, पत्तियां, बेल, कागज आदि) प्रयोग किया जा सकता है। विश्व की प्रत्येक संस्कृति में शरीर के अंगों का मापन की अमानक इकाई के रूप में बार-बार प्रयोग किया गया है (नीचे वर्ग में देखें)। इन मापकों को विभिन्न भाषाओं में विभिन्न नामों से जाना जाता है।

लम्बाई की अमानक माप इकाई के रूप में शरीर के प्रयुक्त अंग

अंगुली – प्रथम अंगुली की चौड़ाई

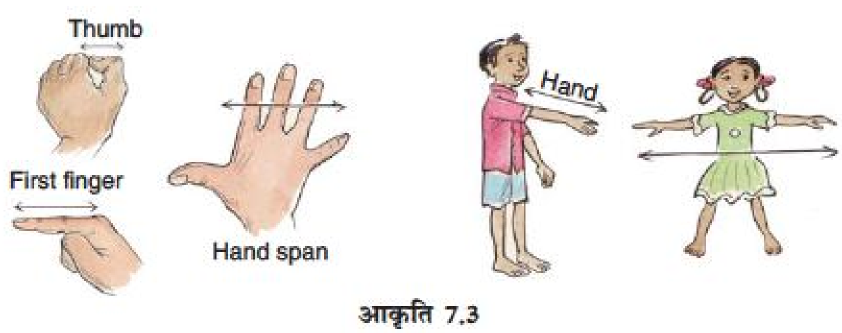
हाथ – एक हाथ की अंगुली के सिरे तक चौड़ाई

Cubit – मध्यमा अंगुली से कोहनी तक एक हाथ की लम्बाई

Pace – एक कदम या डगभर लम्बाई

Fathom – बांये हाथ के अंगुली के अग्रिम सिरे से दांये हाथ की अंगुली के अग्रिम सिरे तक दूरी (दोनों हाथ पूरे फैलाकर)

Inch – अंगूठे के अग्रिम सिरे से प्रथम गांठ तक दूरी (प्रत्येक माप के लिये चित्र भी दिया जा सकता है)



आकृति 7.3

टिप्पणी

क्षेत्रफल, आयतन या धारिता मापन की तुलना में, सभी काल तथा शिक्षा पर विचार से अतीत में लम्बाई मापन में बहुत सारी अमानक इकाइयों का अधिकाधिक प्रयोग हुआ है। अमानक इकाइयों के प्रारंभिक विद्यालयी अवस्था में प्रयोग के निम्नलिखित कारण है :

a) विद्यार्थियों की जानकारी के अनुकूल अमानक इकाई वाली वस्तुओं का प्रयोग करें मापन करते समय विद्यार्थी नये नामों को ग्रहण करने की समस्या से बोझिल नहीं होते। दूसरे, विद्यार्थियों की जानकारी के अनुकूल होने के कारण ये अमानक इकाईयां उनके लिये अमूर्त मानक इकाईयों जैसे सेंटीमीटर, या मीटर की अपेक्षा अधिक सार्थक होती हैं।

b) छोटे बच्चों द्वारा किये जाने वाले मापन के प्राथमिक प्रयोगों में अमानक इकाईयों का प्रयोग अधिक उचित होता है। छात्रों की जानकारी की वस्तुओं यथा डेस्क की लम्बाई, मित्र की ऊंचाई की माप के लिये सेंटीमीटर बहुत ही छोटी इकाई लगती है।

c) अमानक इकाईयों द्वारा मापन का अनुभव विद्यार्थियों को, जहां मापन के लिये मानक पैमाना उपलब्ध नहीं है या मानक पैमाना ठीक नहीं है, जैसी विशिष्टें मापन की स्थिति में नये पैमाने के आविष्कार के लिये प्रोत्साहित करने का कार्य करता है।

d) अमानक इकाईयों के प्रयोग के माध्यम से ही विद्यार्थी मानक इकाईयों के संबंध में जानकारी प्राप्त करते हैं। उदाहरण के लिये- जब मेज की लम्बाई को उनके द्वारा अपने हाथ से मापने पर 2 cubit तथा वही लम्बाई अध्यापिका द्वारा मापने पर $1^{1}/_{2}$ cubit पायी जाती है। कक्षा के विभिन्न विद्यार्थियों द्वारा जब विभिन्न वस्तुओं की माप शरीर के अंशों के माध्यम से की जाती है तो इसमें प्रत्येक विद्यार्थी की माप में भिन्नता होती है, यह भिन्नता का बोध ही विद्यार्थियों को मानक इकाई की खोज की आवश्यकता को समझाता है।

क्रियाकलाप - 4

आस-पास के वातावरण में उपलब्ध उन सभी वस्तुओं को सूचीबद्ध करो जिन्हें अमानक इकाई के रूप में प्रयोग कर लम्बाई मापी जा सकती है।

....

....

....

लम्बाई की मानक इकाइयां : प्राथमिक विद्यालय स्तर पर, मीटर, सेंटीमीटर, मिलीमीटर, और किलोमीटर गणितीय पाठों में प्राय: प्रयोग में आने वाली लम्बाई की मानक इकाइयां हैं। प्रारंभिक अवस्था में, किलोमीटर विद्यार्थी की सामान्य अवधारणा से परे बहुत लम्बी दूरी है। इसलिये, लम्बाई की मानक इकाइयों के परिचय की अवस्था में विद्यार्थियों को मीटर तथा इसकी उपइकाइयों सेंटीमीटर तथा मिलीमीटर से अवगत कराया जाना चाहिये।

टिप्पणी

कब और कैसे विद्यार्थियों को लम्बाई की मानक इकाईयों से परिचय कराया जाना चाहिये?

मानक इकाइयों जैसे मीटर और सेंटीमीटर का परिचय विद्यार्थियों को तभी कराया जाना चाहिये जब कि उन्हें मापन के लिये मानक पैमाने की आवश्यकता हो। प्रथम अवस्था में, विद्यार्थियों की विभिन्न वस्तुओं की लम्बाई की अमानक इकाईयों द्वारा मापन का अभ्यास कराया जाना चाहिये। अर्थात् मापन के लिये इकाई का चयन, इकाई लम्बाई से वस्तु की लम्बाई की तुलना, और तुलना के परिणामों की अंकों में अभिव्यक्ति, और 3 cubit, 2 छड़ियां, 5 paces आदि इकाइयों का अभ्यास।

द्वितीय अवस्था में, जब कि विद्यार्थी अमानक इकाईयों से मापन में भलीभांति निपुण हो चुके हैं, और यह बोध करते हैं कि किसी वस्तु का एकदम ठीक मापन सदैव सम्भव नहीं है और साथ ही यह निश्चित करने में कठिनाई अनुभव करते हैं कि कौन सी माप सही है, उस समय एक निश्चित लम्बाई की माप वाली छड़ी का प्रयोग किया जा सकता है। और जब वे इस छड़ी की सहायता से विभिन्न लम्बाई की वस्तुओं को शुद्धता के साथ मापना सीख जाते हैं जैसा कि हमने पूर्व के उदाहरण में चर्चा की थी, तब ही मानक पैमाने अर्थात् मीटर पैमाने का परिचय विद्यार्थियों से कराया जा सकता है। यदि हम मानक इकाई का परिचय इस प्रकार कराते हैं, तब यह विद्यार्थियों के लिये सार्थक होता है।

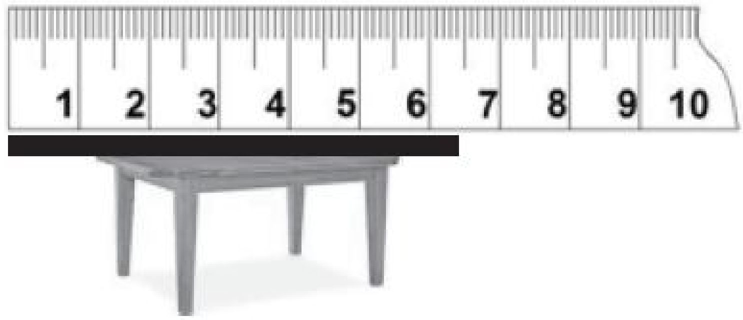
मीटर पैमाने से मापन : जब विद्यार्थी छड़ी द्वारा मापन का अभ्यास कर रहे होते हैं, तब आपको यह सुनिश्चित कर लेना चाहिये कि छड़ी का एक किनारा मापी जाने वाली वस्तु के एक किनारे से सटा हुआ है। डेस्क का मापन करते हुए छड़ी को डेस्क के एक किनारे से सटा होना चाहिए। (लम्बा किनारा) और छड़ी का एक सिरा टेबल के किनारे के प्रारम्भिक बिंदु के संगत होना चाहिए। टेबल के किनारे पर एक निशान बनाना चाहिए जहां पर छड़ी का दूसरा सिरा समाप्त होता है। इसके पश्चात छड़ी को हटा लेना चाहिए और इस तरह पुनः टेबल के किनारे से सटा कर रखे ताकि जहां पर निशान लगाया था वहां पर छड़ी का प्रारम्भिक सिरा होना चाहिए और छड़ी का दूसरा सिरा टेबल के किनारे पर जहां समाप्त होता है वहां पर एक निशान लगाये। यह प्रक्रिया इसी क्रम से जारी रखे जब तक कि टेबल की कुल लम्बाई छड़ी द्वारा मापी जाती है। टेबल की कुल लम्बाई को ढकने में छड़ी की जितनी संख्या लगी वह टेबल की लम्बाई की माप है। (एक आकृति 7.4 दो चित्रों के साथ यहां, ऊपर की प्रक्रिया की दिखाते हुए, दी जा सकती है) जब विद्यार्थी इस प्रक्रिया से अच्छी तरह परिचित हो जाते हैं तब वे मानक मीटर स्केल का उपयोग करने के लिए तैयार है।

मानक मीटर स्केल के साथ मापन की प्रक्रिया लगभग ऊपर वर्णित प्रक्रिया के समान है। कुछ अतिरिक्त सुझाव, जो नीचे दिये गये है, को ध्यान में रखने की जरूरत है ताकि विद्यार्थी स्केल का सही ढंग से इस्तेमाल करने के योग्य हो सकें।

- स्केल के उप-इकाई के चिन्हों से बच्चों को परिचित करना– बच्चों को ये स्पष्ट होना चाहिए कि स्केल पर बने विभाजन चिन्ह बराबर दूरी पर है। मीटर स्केल पर बने सेंटीमीटर चिह्नों को पहचानने योग्य होने चाहिए। लम्बाई के मापन में सेंटीमीटर का इस्तेमाल करना

टिप्पणी

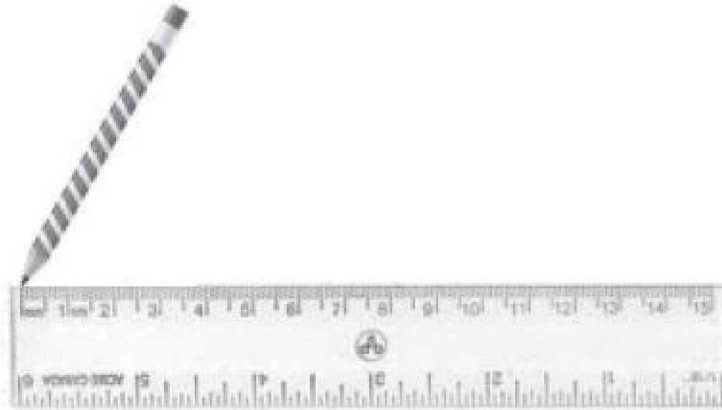
सीखने के पश्चात उन्हें मिलीमीटर और मीटर से परिचित करायें। (यहां पर मीटर स्केल जिसके किनारे पर सेंटीमीटर के चिह्न बने हो की आकृति दे सकते है) आकृति 7.5



आकृति 7.4

आकृति 7.5

- मापन वस्तु के साथ स्केल को उचित रूप से रखना– मापे जाने वाले वस्तु के साथ स्केल को सही ढंग से और सन्निकटता के साथ रखना बहुत महत्वपूर्ण है।



आकृति 7.6

टिप्पणी

बच्चों को प्रदर्शन करके दिखाये कि स्केल का '0' (शून्य) निशान मापे जाने वाले वस्तु के किनारे के एक सिरे के संगत में हो। यह शुरू में सीखने वाले बच्चों के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। उनको यह भी दिखाना चाहिए कि अगर 0 (शून्य) चिह्न उचित ढंग से नहीं रखा गया तो वस्तु के अंत बिंदु पर स्केल के पाठ में भी परिवर्तन हो सकता है। (यहां पर कम से कम 2 या 3 चित्र बनाया जा सकता है जिसमें वस्तु को मापते समय, जैसे पेंसिल, स्केल के 0 (शून्य) को सही ढंग से वस्तु के किनारे के प्रारम्भ बिंदु पर रखते हुए और एक चित्र में गलत ढंग से 0 (शून्य) चिह्न को वस्तु के किनारे पर रखते हुए दिखाया जा सकता है। (आकृति 7.6)।

विद्यार्थियों को स्केल को वस्तु के एक किनारे पर इस प्रकार रखने के लिए कहे ताकि '0' (शून्य) चिह्न किनारे के प्रारम्भिक बिंदु के संगत ना हो बल्कि कोई चिन्ह जैसे 1,2, या 3 हो। और उन्हें वस्तु के दूसरे अंत बिंदु पर स्केल के पाठ को पढ़कर अंतर को चिन्हित करने के लिए कहें। (यहां पर उचित चित्र बना सकते हैं आकृति 7.7)

आकृति 7.7

- **वस्तु की वास्तविक लम्बाई ज्ञात करने से पहले वस्तु की लम्बाई का अनुमान लगाना–** जैसे कि पहले चर्चा की जा चुकी है, कि बच्चों को पहले मापे जाने वाले वस्तु की लम्बाई का अनुमान लगाने के लिए सदैव प्रोत्साहित करें इसके पश्चात ही बच्चों को मापक स्केल की सहायता से वस्तु की लम्बाई ज्ञात करने को कहें।

- **लम्बाई की सही ढंग से गणना करना–**

  बच्चों को कई उदाहरण देकर विभिन्न वस्तुओं की लम्बाई, मानक स्केल या रूलर की सहायता से सही ढंग से ज्ञात करने के लिए कहें।

– पहले जब बच्चा स्केल के '0' (शून्य) चिह्न को वस्तु के किनारे के प्रारम्भिक बिंदु पर रखता है तथा दूसरे अंत बिंदु पर स्केल का पाठ इसकी लम्बाई बताता है।

– जब बच्चा '0' (शून्य) के अतिरिक्त 1, 2, या 3 चिह्न को वस्तु के किनारे के प्रारम्भिक बिंदु पर रखता है तो स्केल का दोनों सिराओं के पाठों का अंतर उसकी लम्बाई को दर्शाता है।

टिप्पणी

- प्रथम बार लम्बाई की एक विशेष इकाई का इस्तेमाल करते समय उदाहरण के लिए सेंटीमीटर, बच्चों को ऐसी वस्तु उपलब्ध करानी चाहिए, जैसे वायर, घड़ी, पेपर पट्टिका आदि, जिससे कि उस वस्तु की माप पूर्ण इकाई में की जा सके (अर्थात् 3 से.मी. 5 से. मी., 10 से.मी. आदि) और जिसमें इकाई के भागों का इस्तेमाल न हो। जब वे ऐसे मापन में सिद्धहस्त हो जाते हैं तब उन्हें ऐसी वस्तु दे जिसके लम्बाई के मापन में उप-इकाई या इकाई के भागों का इस्तेमाल हो (जैसे मिलीमीटर)।

- **मापन कौशल का विकास करना–** मानक स्केल के साथ लम्बाई ज्ञात करने के लिए आधारभूत कौशलों की आवश्यकता होती है जैसे स्केल को वस्तु के किनारे सही ढंग से रखना, सही ढंग से स्केल के पाठ को पढ़ना और पाठों के अंतर की गणना करना। इनमें से किसी भी कौशल को सीखना कठिन नहीं है परन्तु विद्यार्थी लापरवाही के कारण गल्तियां करते हैं। प्रारम्भिक अवस्था से ही इनका ध्यान रखने से बच्चों को इन कौशलों को आसानी से विकसित करने में सहायक होंगे।

- **उपयुक्त स्केल या रूलर का चुनाव करना–** विभिन्न लम्बाई और रूप के स्केल बाजार में उपलब्ध है। मीटर, 30 सेंटीमीटर, 15 सेंटीमीटर लम्बाई के स्केल सामान्यतः बाजार में उपलब्ध है और विद्यालय में इनका इस्तेमाल किया जाता है। इसके अतिरिक्त बच्चों को बढ़ई या मिस्त्री द्वारा इस्तेमाल किये जाने वाले मीटर टेप और कपड़ों की दुकान में इस्तेमाल होने वाले मीटर छड़ से भी परिचित कराये।

लम्बाई मापन के प्रारम्भिक अवस्था में कक्षा कक्ष में मानक स्केल का इस्तेमाल करते समय 30 सेंटीमीटर लम्बे स्केल या रूलर का इस्तेमाल करना उचित है क्योंकि विद्यालय और उनके आसपास के वातावरण में उपलब्ध वस्तु की लम्बाई मापने में यह पर्याप्त और उपयुक्त है। बड़े लम्बाई के स्केल या टेप की आवश्यकता मापक वस्तु की लम्बाई के ऊपर निर्भर करती है। यदि कक्षा-कक्ष या स्कूल के बरामदे की लम्बाई ज्ञात करना हो तो तब बड़े लम्बाई के मीटर स्केल की आवश्यकता पड़ेगी और कापी पर खींची रेखा की लम्बाई या छोटी वस्तु की लम्बाई ज्ञात करना हो तो 15 सेंटीमीटर लम्बे स्केल का चुनाव उपयुक्त होगा।

वस्तुओं की लम्बाई मापना विद्यार्थियों के लिए तुलनात्मक रूप से समझना और क्रियान्वित करना आसान है विद्यार्थियों को कक्षा-कक्ष के भीतर और बाहर ऐसे विभिन्न क्रियाकलापों में संलग्न रहने के लिए उत्साहित करे जिसमें वस्तुओं की लम्बाई मापन का समावेश हो।

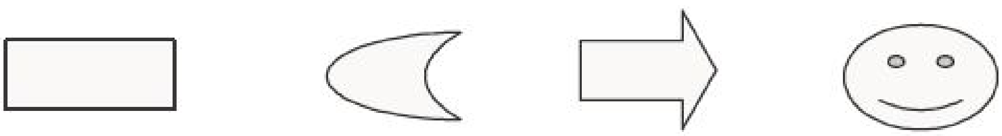
कुछ ऐसी क्रियाकलाप निम्नलिखित है–

- रंगीन छड़ियों का अमापक स्केल तैयार करना जिसमें समान दूरी पर विभिन्न रंगों द्वारा निशान लगाया गया हो।
- 10 से.मी., 15 से.मी. और 20 से.मी. आदि का सेंटीमीटर स्केल तैयार करना जिसमें प्रत्येक सेंटीमीटर के भाग को अलग-अलग रंगों में रंगे होना चाहिए।
- कबड्डी, खो-खो, बैडमिंटन आदि खेल के लिए मैदान तैयार करना।

- लम्बी कूद और ऊंची कूद में भाग लेना तथा कूदी गयी दूरी को मापना।
- विभिन्न लम्बाई की सीधी रेखा खींच कर आकृति बनाना।

7.3.2 क्षेत्रफल की माप

किसी वस्तु के क्षेत्रफल की माप करने से पहले, यह समझना जरूरी है कि वास्तव में क्षेत्रफल का क्या अर्थ है? हमने देखा कि सीधी रेखाखंड का मापन किया जाता है। रेखाखंड जो कि एक आयामी है, टेबल के किनारे, एक सीधेवायर, मानचित्र की रेखा, या एक पेंसिल आदि के द्वारा निरूपित किया जा सकता है। आओ निम्नांकित आकृतियों पर विचार करें।



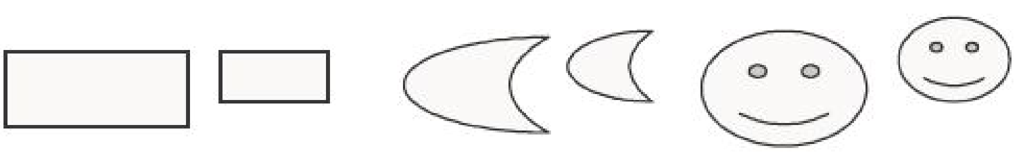
(a) (b) (c) (d)

आकृति 7.8

लम्बाई मापन के ज्ञान के साथ आकृतियां 7.8 के किन भागों/पहलुओं को हम माप सकते हैं।

- आकृति के सीमा रेखाओं का मापन कर सकते हैं।
- लेकिन क्या आकृति के आकार और रूप को प्रदर्शित करने वाली सीमाओं को भी माप सकते हैं?

आकृति की सीमा उसके रूप को बताती है परन्तु वस्तु के आकार के बारे में पर्याप्त जानकारी नहीं देती है। उदाहरण के लिए, निम्नांकित आकृति युग्मों की तुलना करें।



(a) (b) (c)

आकृति 7.9

प्रत्येक आकृति युग्म में उनके रूपों में पूर्ण रूप से समानता है।

परन्तु युग्म की दोनों आकृतियों में क्या भिन्नता है? प्रत्येक युग्म की दोनों आकृतियों का रूप एक जैसा है परन्तु उनके आकार भिन्न है। यदि आप बच्चों से यह पूछे कि इन दोनों में से कौन सी आकृति बड़ी है तो लगभग सभी बच्चे इसका उत्तर सही ढंग से दे सकते हे अर्थात बड़ी आकृति की ओर बच्चे संकेत करेंगे। जब बच्चों के एक समूह से यह पूछा गया कि आपने एक को दूसरे की अपेक्षा बड़ा क्यों चुना। कुछ उत्तर इस प्रकार थे–

एक आकृति दूसरे से बड़ी दिखाई देता है।

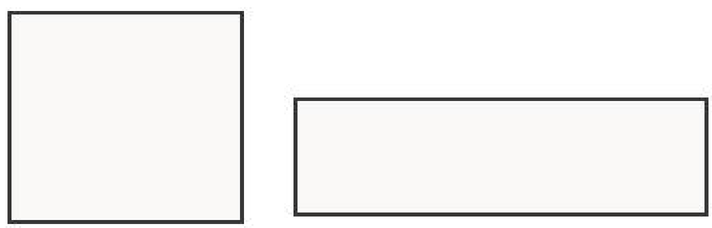
जब एक आकृति को दूसरी आकृति के ऊपर रखा तो मैने बड़ी आकृति को पहचान लिया।

वह बड़ा है जो पेपर का अधिक स्थान घेरता है। वह आकृति जो टेबल पर अधिक फैलता है वह बड़ी है। और जो कम फैलती है वह छोटी है।

बच्चों के उत्तरों से यह पता चलता है कि बच्चे आकृति के विशालता और लघुता को सही ढंग से पहचान सकते हैं। और वे क्षेत्रफल के विचार के काफी नजदीक है। क्षेत्रफल समतल आकृति की विशेषता है–

यह आकृति का समतल पर फैलाव या समतल के हिस्से को आकृति द्वारा घेरना है। समतल, पेपर टेबल की तल या कांच प्लेट या इसी तरह अन्य वस्तुयें हो सकती हैं।

परन्तु समस्या वहां उत्पन्न होती है जब बच्चों को दो भिन्न आकृतियों को तुलना करने के लिए कहें जबकि दोनों आकृति समरूप नहीं है। निम्नांकित आकृतियों को देंखे।



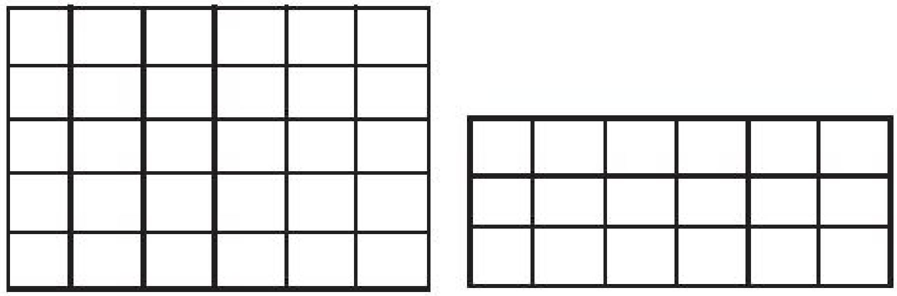
(a) (b)

आकृति 7.10

आप कैसे जानेंगे कि उपरोक्त आकृतियों में कौन सी आकृति अधिक क्षेत्र घेरती हैं या स्पष्ट कहे तो, किसका क्षेत्रफल अधिक है?

एक आकृति को दूसरे आकृति पर अध्यारोपित करके हम इनकी क्षेत्रफल की तुलना नहीं कर सकते हैं जैसे कि हमने पूर्व के उदाहरण में समरूप आकृतियों में किया था। ऐसी स्थिति में यह आवश्यक हो जाता है कि एक वस्तु जिसे क्षेत्रफल, मापक इकाई समझा जा सकता है, का इस्तेमाल करे और इन आकृतियों के क्षेत्रफल का अनुमान लगाया जाये। आओ एक विशेष आकार के कई माचिस की डिब्बियां लेते हैं। (ऐसे माचिस के डिब्बियों के तल का क्षेत्रफल समान होंगा।)

अब इन माचिस के डिब्बियों को इस प्रकार पास-पास इन आकृतियों के ऊपर रखते हैं कि आकृति का कोई भाग न छूटे और पूर्णत: ढ़क जाये और न ही माचिस की डिब्बी एक दूसरे के ऊपर हो। निम्नांकित आकृति को देंखे।



(a) (b)

आकृति 7.11

(छोटे वर्गों को माचिस के डिब्बी के चित्रों से ढ़के)

आप देख सकते है कि आकृति 7.11 (a) 30 माचिस के डिब्बियों से ढका हुआ है जबकि दूसरी आकृति टेबल उसी आकार के 21 माचिस की डिब्बियों से ढका हुआ है। इसलिए आप तर्क पूर्ण ढंग से कह सकते हैं कि आकृति 7.11 (a) का क्षेत्रफल आकृति 7.11 (b) से अधिक हैं। दोनों आकृतियों के क्षेत्रफलों की तुलना करने के अलावा हम प्रत्येक आकृति के क्षेत्रफल का अनुमान छोटे इकाई वाले वस्तु के माध्यम से कर सकते है जैसे माचिस के डिब्बे के तल का क्षेत्रफल के द्वारा।

क्या आप निम्नांकित आकृतियों के क्षेत्रफल का अनुमान लगा सकते हैं।

(a) (b) (c) (d) (e)

आकृति 7.12

हम इन आकृतियों के क्षेत्रफल की गणना नहीं कर सकते हैं क्योंकि समतल में ऐसा कोई क्षेत्र नहीं है जो इन आकृतियों द्वारा घेरा गया हो। जैसे कि बंद आकृतियों त्रिभुजों, चतुर्भुजों और वृत्तों की हमारी अवधारणा है उस तरह कि ये आकृतियां नहीं हैं। ये आकृतियां खुली हैं और किसी क्षेत्र को घेरती भी नहीं है। प्रारम्भिक अवस्था में समतल आकृतियों के क्षेत्रफल के बारे में जानकारी प्राप्त करते समय, समान आकार की माचिस की डिब्बियां, प्लास्टिक के वर्ग एक ही आकार के या रंगीन पेपर के वर्ग समान आकार के, समान आकार की पुस्तकें या कापियां आदि का इस्तेमाल आपको करना चाहिए। कुछ क्रियाकलाप जिनमें ऐसी वस्तुओं का उपयोग कक्षा कक्ष में किया जा सकता है नीचे दिये गये हैं।

– अध्यापक के टेबल को समान आकार की कापियों से ढ़कना और गणना करना कि टेबल के सतह को पूर्ण रूप से ढ़कने में कितनी कापियों की जरूरत पड़ी।

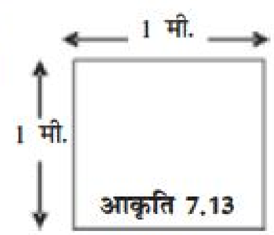
- विद्यार्थियों के डेस्क की ऊपरी सतह को समान आकार की पुस्तकों से ढकना।
- पुस्तक या कापी के सतह को माचिस की डिब्बियों से ढ़कना (आप माचिस के डिब्बियों के फलक को बदल-बदल कर पुस्तक या कापी की सतह को ढ़कने के लिए कहें और प्रत्येक स्थिति में विद्यार्थियों को माचिस की डिब्बियों की संख्या को गिनने को कहें)
- कक्षा-कक्ष के दीवार या फर्श को समान आकार के रंगीन कागजों के वर्ग से ढक कर सजाना।

समतल आकृतियों के क्षेत्रफलों की तुलना करने में या अनुमान लगाने में हम समान आकार के छोटे इकाई जैसे माचिस की डिब्बियों का इस्तेमाल इस प्रकार करते हैं ताकि समतल आकृति की सतह पूर्ण रूप से ढ़क जाये।

परन्तु जब समतल आकृति की सतह पूर्ण रूप से ढ़की ना जा सके और कुछ भाग खुला रह जाये तब क्या होगा? अर्थात हमारे उदाहरण में अगर माचिस की डिब्बियां सतह को पूर्णरूप से ढ़क ना पाये और कुछ जगह खुला छूट जाये। इसके लिए हम एक सर्वनिष्ठ अभ्यास का अनुसरण करते है अर्थात यदि सतह का छूटा हुआ भाग मापक इकाई (माचिस की डिब्बी) के आधे से कम हो तो तब उस छूटी सतह को हम क्षेत्रफल की गणना में शामिल नहीं करते है। और जब सतह का वह खुला या छूटा हुआ हिस्सा अगर मापक इकाई (माचिस की डिब्बी) के आधे के बराबर या उससे अधिक हो तो हम उस भाग को एक इकाई के बराबर मानकर समतल आकृति के क्षेत्रफल की गणना करते हैं।

क्षेत्रफल माप की मानक इकाईयां–

क्षेत्रफल के मापन के लिए एक वर्ग के क्षेत्रफल को उपयुक्त मानक इकाई समझा जाता है। उदाहरण के लिए 1 मीटर भुजा वाले वर्ग आकृति 7.13 में दिखाया गया है।



आकृति 7.13

ऐसे वर्ग के क्षेत्रफल को 1 वर्गमीटर लिया गया है और प्रतीकात्मक रूप से इसे 1 वर्ग मी. या 1 मी.^{2} से निरूपित करते हैं।

नोट– 1 मीटर-वर्ग को 1 मी.^{2} के रूप में परिभाषित किया जाता है।

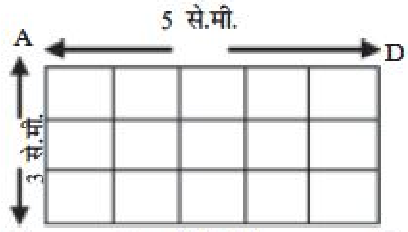
यदि आप अपने कक्षा-कक्ष की, कक्षा-कक्ष की दीवार की सतह, या बगीचे के प्लाट का क्षेत्रफल और इसी प्रकार अन्य बड़े बंद स्थानों का क्षेत्रफल की माप करने के लिए 1 वर्ग मी. इकाई का उपयोग करते हैं तो यह उपयुक्त है।

परन्तु छोटे क्षेत्रों जैसे आपके कापी में आरेखित आकृति, आपके पुस्तक के जिल्द के लिए आवश्यक पेपर का आकार, या आपके रूमाल के आकार के क्षेत्रों का क्षेत्रफल की माप करने के लिए 1 वर्ग मी. इकाई बहुत बड़ी होगी अत: छोटे क्षेत्रों के क्षेत्रफल की माप के लिए छोटी इकाई की आवश्यकता पड़ेगी। इसके लिए 1 वर्ग से.मी. या 1 से.मी.^{2} इकाई उपयुक्त होगा।

टिप्पणी

मापक इकाईयों का इस्तेमाल करके ज्यामितीय आकृतियों का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है? आकृति 7.14 में दी गयी आयताकार आकृति ABCD का अवलोकन करें इसकी लम्बाई की माप 5 सेंटीमीटर और चौड़ाई 3 से.मी. है। चूंकि लम्बाई और चौड़ाई की माप सेंटीमीटर में है अत: इस आकृति के क्षेत्रफल की माप की गणना करने के लिए 1 वर्ग से.मी. या 1 से.मी.^{2} इकाई उपयुक्त इकाई है।

अब 1 से.मी. माप के कागज के वर्ग से इस आयताकार आकृति को इस प्रकार ढ़कते है कि कोई भी भाग खुला न छूटे और न ही एक दूसरे पर अध्यारोपित होना चाहिए। आकृति 7.14 देखें इसमें 3 पंक्तियां है और प्रत्येक पंक्ति में 5 वर्ग (1 से.मी.) की आवश्यकता पड़ती है। अर्थात आयत ABCD को पूर्ण रूप से ढ़कने के लिए 15 वर्गों की आवश्यकता होती है (5 वर्ग प्रत्येक पंक्ति $\times$ 3 पंक्ति)।



आकृति 7.14

अत: आयत ABCD का क्षेत्रफल 1 से.मी. वर्ग का 15 गुना या 15 वर्ग से.मी. या 15 से.मी^{2} है।

एक आयताकार आकृति के क्षेत्रफल की माप 1 वर्ग से.मी. इकाई का इस्तेमाल करते हुए निम्न विधि से ज्ञात किया जा सकता है।

आकृति 7.14 में दिखाये गये आयताकार आकृति के क्षेत्रफल की माप ज्ञात करने के लिए रेखाखंड AB और रेखाखंड AD के समांतर रेखायें इस प्रकार खींची कि आयताकार 1 से.मी. भुजा वाले वर्गों में विभाजित हो जाये।

प्रथम पंक्ति में वर्गों की संख्या $= 5$

तीन पंक्तियों में वर्गों की संख्या $= 5 \times 3 = 15$

इस प्रकार हम देखते है कि आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई में इकाईयों की संख्या $\times$ चौड़ाई में इकाईयों की संख्या संक्षेप में, इसे हम लिखते है :

$$\boxed{\text{आयत का क्षेत्रफल} = (\lambda \times b) \text{ से.मी.}^2}$$

जहां पर λ लम्बाई में इकाईयों की संख्या को और b चौड़ाई में इकाईयों की संख्या को प्रदर्शित करता है। आकृति 7.14 में $\lambda = 5$ (5 से.मी. नहीं) और $b = 3$ (3 से.मी. नहीं)

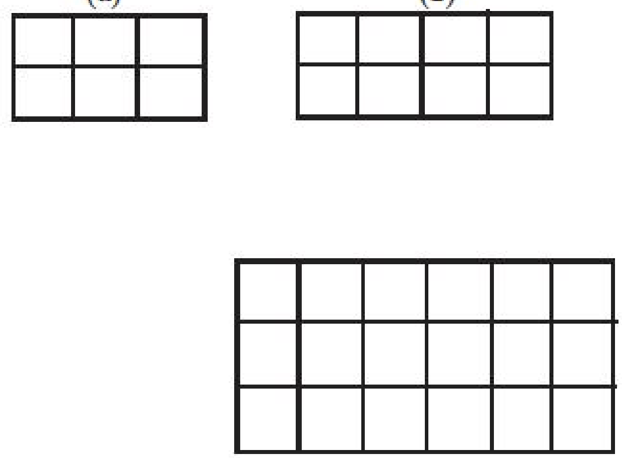
अत: आयत ABCD का क्षेत्रफल $= (5\times3)$ से.मी.^{2} $= 15$ से.मी.^{2}

इसी प्रकार वर्ग का क्षेत्रफल $= (\lambda \times \beta)$ से.मी.^{2}

टिप्पणी

अपनी प्रगति की जांच करें :

E-5 निम्नांकित प्रत्येक आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करें जहां प्रत्येक छोटा वर्ग 1 से.मी.^{2} क्षेत्रफल को निरूपित करता है।



(a) (b) (c) (d)

आकृति 7.15

अन्य ज्यामितीय आकृतियों जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज और बहुभुजों के क्षेत्रफल की गणना करने के लिए आयत के क्षेत्रफल-नियम का इस्तेमाल किया जाता है।

असमान आकृतियों का क्षेत्रफल : असमान आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सेंटीमीटर ग्राफ या सेंटीमीटर धागा ग्राफ का इस्तेमाल किया जा सकता है। दोनों एक ही सिद्धांत पर कार्य करते हैं। असमान आकृति को (जैसे पेड़ की पत्ती) ग्राफ पेपर के ऊपर रखकर उसकी सीमाओं को पेन्सिल के माध्यम से आरेखित करें। आकृति 7.15 (ग्राफ पर आकृति का चित्र निर्देशानुसार बनाये) पत्ती का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ग्राप पर पत्ती द्वारा घेरे गये आकार के भीतर स्थित वर्गों की गणना करें। यदि रेखांकित आकृति में कुछ वर्ग उसके आधे से अधिक हो या उसके आधे के बराबर हो तो उसे एक वर्ग इकाई मानकर क्षेत्रफल की गणना करें। कुल वर्गों की संख्या आकृति का सन्निकट क्षेत्रफल वर्ग सेंटीमीटर में है।

यह एक रूखा सन्निकटन है। असमान आकृतियों के बंद क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की एक अच्छी विधि है उस बंद क्षेत्र को लम्बवत और क्षैतिज समान आयताकार पट्टियों में विभाजित करके उनके क्षेत्रफलों का योग ज्ञात करना।

उच्च और निम्न क्षेत्रफल-इकाई : ABCD एक मीटर-वर्ग है (आकृति 7.16) उसे AB और AD के समांतर रेखाखंड खींचकर 1 सेंटीमीटर भुजा वाले वर्गों में विभाजित किया गया। इस प्रकार कुल 100 छोटे वर्ग लम्बाई AB के सापेक्ष और 100 छोटे वर्ग चौड़ाई के सापेक्ष प्राप्त होते है।

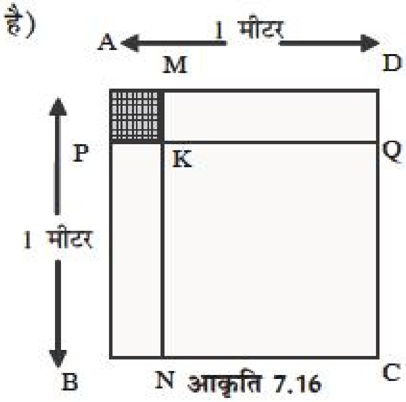
कुल छोटे वर्गों की संख्या ABCD में $= 100 \times 100 = 10{,}000$ प्रत्येक छोटे वर्ग का क्षेत्रफल 1 से.मी.^{2} है (क्योंकि यह एक सेंटीमीटर वर्ग है)

इस प्रकार 1 मी.^{2} = 10,000 से.मी.^{2}

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते है

1 से.मी.^{2} = (10×10) मि.मी.^{2}

= 100 मिमी.^{2}



आकृति 7.16

भूमि का मापन : भूमि के क्षेत्रफल मापन के लिए परपरांगत मापन इकाई 'एकड़' सामान्यत: मानक इकाई है।

मिट्रिक पद्धति में Are के साथ हेक्टेयर भूमि के क्षेत्रफल मापन की इकाई है।

1 हेक्टेयर = 10,000 मी.^{2} और 1 Are = 100 मी.^{2}

इनसे आप गणना करके प्राप्त कर सकते है।

1 हेक्टेयर = 100 Are और 100 हेक्टेयर = 1 कि.मी.^{2}

$\therefore$ 1 हेक्टेयर = 2.471 एकड़

7.3.3 आयतन की माप

अब तक हम 1-D की माप (लम्बाई की माप) और 2-D (लम्बाई और क्षेत्रफल की माप), वस्तुओं की माप के बारे में चर्चा कर चुके है। आओ अब 3-D वस्तुओं के विभिन्न पहलुओं की माप के बारे में चर्चा करें। हमारे आस-पास की ज्यादातर वस्तुएं त्रिविमीय है–लम्बाई, चौड़ाई और ऊंचाई या मोटाई अपने आसपास की किसी भी वस्तु का नाम लें चाहे यह टेबल, कुर्सी, डेस्क, किताब, बैट, पेन्सिल, चाक आदि हो– ये 3-D वस्तुएं ही होगी और प्रत्येक, आकाश में एक निश्चित स्थान घेरती है।

एक वस्तु द्वारा घेरे गये स्थान की मात्रा उस वस्तु का आयतन कहलाता है।

वस्तु द्वारा घेरी गयी जगह की मात्रा का निर्धारण कैसे करें? इस प्रश्न का उत्तर देने से पहले हमें यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि क्या बच्चों ने एक वस्तु के आयतन की संकल्पना को विभिन्न 3-D वस्तुओं की तुलना के आधार पर अनुमान लगाकर समझ लिया है।

– क्या रूलर, पेन्सिल की अपेक्षा अधिक स्थान घेरता है।

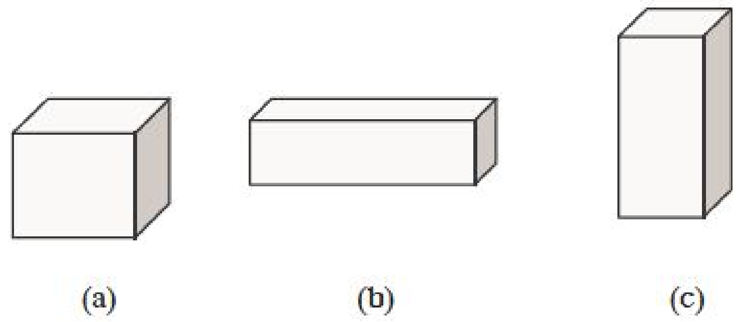
– क्या क्रिकेट बाल फुटबाल की अपेक्षा अधिक स्थान घेरता है।

– क्या एक चाक का टुकड़ा एक डस्टर से अधिक स्थान घेरता है।

टिप्पणी

- क्या एक आम एक नींबू से अधिक स्थान घेरता है।
- क्या एक गाय एक भैंस की अपेक्षा अधिक स्थान घेरती है।

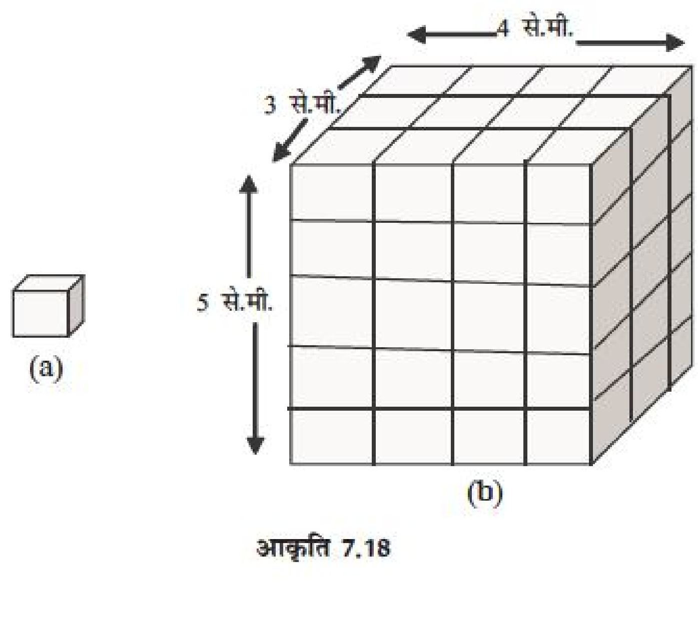
यह सुनिश्चित करने के पश्चात कि बच्चे वस्तुओं की तुलना कर सकते है उनको आप लकड़ी के बने घन और धनाभ दिखाये (आकृति 7.17) और उनसे इन लकड़ी के आकारों की तुलना करने को कहें।



आकृति 7.17

यहां पर बच्चे इन लकड़ी के ब्लाकों की तुलना करके इनके आयतन का अनुमान लगाने में कठिनाई महसूस करते है। इसके लिए उनको वस्तु का आयतन निर्धारण करने की विधियों को जानना आवश्यक है।

जैसा कि लम्बाई और क्षेत्रफल की स्थिति में, आयतन माप के लिए भी एक मापक इकाई की पहचान करने की आवश्यकता है। 1 से.मी. × 1 से.मी. × 1 से.मी. के छोटे घन इकाई का इस्तेमाल आयतन मापन के लिए मानक इकाई के रूप किया जाता है।



आकृति 7.18

टिप्पणी

इस घन इकाई जिसके प्रत्येक किनारे की माप 1 से.मीटर है को सेंटीमीटर घन कहते है (आकृति 6.18 a) इसके आयतन को 1 घन सेंटीमीटर लिया जाता है और इसे 1 से.मी.^{3} से निरूपित किया जाता है।

बड़े त्रिविमीय आकारों का आयतन मापने के लिए आयतन की बड़ी इकाई जैसे घन मीटर या 1 मी.^{3} का इस्तेमाल किया जा सकता है।

आओं अब एक समान ठोस जैसे धनाभ (आकृति 6.18 b) का आयतन का मापन किस प्रकार कर सकते है। जैसेकि आकृति में दिखाया गया है कि धनाभ 3 से.मी. $\times$ 4 से.मी. $\times$ 5 से. मी. माप का है। आप अवलोकन कर सकते हैं कि धनाभ 1 सें.मी. मोटाई वाले 5 स्लेब है और प्रत्येक स्लेब में 3 पंक्तियां है और प्रत्येक पंक्ति में 4 घन सें.मीटर है। इसका अर्थ है प्रत्येक स्लेब में $(4 \times 3 =)12$ घन सें.मी. और 5 स्लेब में कुल 60 सें.मी. घन है। इस प्रकार धनाभ (3 सें.मी. $\times$ 4 से.मी. $\times$ 5 सें.मी.) में कुल 60 सें.मी. घन है। या 60 सें.मी.^{3}। इस उदाहरण से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि

धनाभ का आयतन $= (l \times b \times h)$ घन इकाई,

जहां पर $l =$ लम्बाई, $b =$ चौड़ाई औ $h =$ ऊंचाई धनाभ की माप है।

घन में, हम जानते है $l = b = h$ अत: घन का आयतन $= (l)^3$ घन इकाई

यदि हमारे पास ठोस वस्तु है जैसे धनाभ या 3-D वस्तु तो हम इनका आयतन हम धनाभ के आयतन निर्धारण करने के सूत्र में उपयुक्त सुधार करके ज्ञात कर सकते है। एक ठोस वस्तु का आयतन ज्ञात करने के लिए एक सर्वनिष्ठ विधि है। यह विधि वस्तु द्वारा घेरे गये जगह के आयतन से निकाली गयी है।

यदि वस्तु को पूर्ण रूप से किसी द्रव में डुबा दिया जाये तो उसके द्वारा हटाये गये द्रव की मात्रा उसके आयतन के बराबर होती है।

क्रियाकलाप :

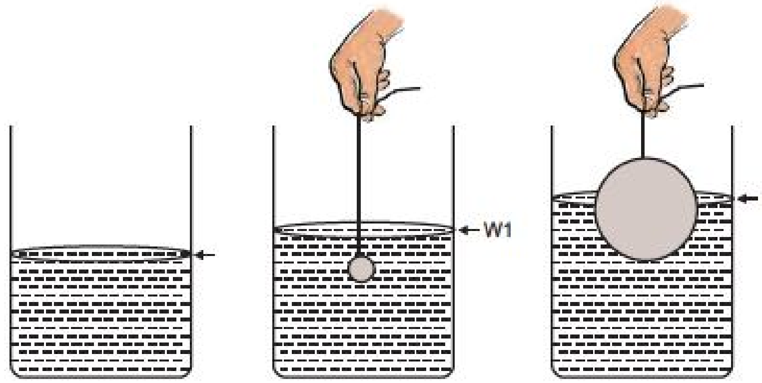
एक कॉच या पारदर्शी प्लास्टिक बाल्टी ले और इसे पानी से भरें। बाल्टी में पानी के स्तर पर निशान लगायें। इसके बाद एक पत्थर का टुकड़ा जो एक रस्सी से बंधा हो बाल्टी के पानी में डुबाये। अब पानी के स्तर पर पुन: निशान लगाये जब पत्थर का टुकड़ा पानी में डुबाते हैं (इसे w_1 नाम दे) अब एक और बड़ा पतथर ले और उसे बाल्टी के पानी में डुबाये और पानी के स्तर पर निशान लगाये (इसे w_2 नाम दे) क्या आप दोनों स्थितियों में पानी के स्तरों में अंतर ज्ञात कर सकते हैं? (w_1 और w_2 के बीच में)? (यहां पर ऊपर वर्णित क्रियाकलाप के दो चित्र बनाये)

....

टिप्पणी

....

....



आकृति 7.19

इस गुण का उपयोग करते हुए, एक ठोस वस्तु का आयतन, बेलनाकार जार का इस्तेमाल करके, जिसका आयतन घन सेंटीमीटर (C.C) में व्यक्त किया गया हो, मापा जाता है। इस विधि में मापक इकाई के सापेक्ष बेलनाकार जार में घन सेंटीमीटर के निशान लगाकर उसे पानी से भर देते है और पानी के स्तर को लिख कर रख लेते है। उसके बाद जिस वस्तु का आयतन ज्ञात करना होता है उसे जार के पानी में पूर्ण रूप से डुबा देते हैं और पानी के स्तर को लिखकर रख लेते हैं। दोनों पानी के स्तरों का अंतर उस वस्तु का आयतन होता है।

दूसरा तरीका यह है कि किसी बर्तन को पानी या किसी और द्रव पदार्थ से पूर्ण रूप से भर लेते है और अतिरिक्त बूँद डालने से बर्तन के पानी का बहाव शुरू हो जाता है। अब इस पानी में वस्तु को (जिसका आयतन मापा जाना है) को डुबो देते है। और बर्तन से बाहर गिरने वाले पानी की प्रत्येक बूंद को इकट्ठा करते हैं यह विस्थापित पानी की बूंदों का आयतन वस्तु के आयतन के बराबर होता है।

धारिता और आयतन : हमने ठोस वस्तु को पानी में डुबोकर उसका आयतन ज्ञात करने की विधि को सीखा, परन्तु इस विधि का उपयोग द्रव पदार्थो का आयतन ज्ञात करने में नहीं किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त द्रव पदार्थों का एक निश्चित आकार भी नहीं होता है। द्रव पदार्थ उस बर्तन का आकार ले लेते है जिसमें द्रव पदार्थ को रखा जाता है। एक बर्तन की धारिता द्रव के आयतन को प्रदर्शित करता है, इसी प्रकार रेत, नमक या इसी तरह की अन्य वस्तु का आयतन भी ज्ञात किया जा सकता है। यदि एक बाल्टी को पूर्ण रूप से 20 बोतल (सभी बोतल समान आकार के है) पानी से भरा जा सकता है तो बीस बोतल पानी बाल्टी की धारिता है। यदि प्रत्येक पानी के बोतल की धारिता 1 लीटर है तो बाल्टी की धारिता 20 लीटर है।

अधिगम के प्रारंभिक अवस्था में बच्चों को अलग-अलग बर्तनों की अमापक इकाई का उपयोग करके धारिता की माप करने के अवसर प्रदान करना चाहिए। कुछ इसी प्रकार के क्रियाकलाप जिन्हें बच्चे स्कूल के भीतर या बाहर कर सकते हैं नीचे दिया गया है।

- कप का इस्तेमाल करके चाय की केतली या अन्य बर्तनों में पानी भरना।
- एक बोतल के द्वारा बर्तन में पानी भरना।
- एक बाल्टी का उपयोग करके विद्यालय के पीने के पानी की टंकी को भरना।
- एक टिन के डिब्बे में रेत भरकर माप करना
- एक छोटे से टिन के डिब्बे/प्लास्टिक डिब्बे की सहायता से चावल/धान/गेहूं/अन्य अनाज के दानों की माप करना।

अमापक इकाईयो जैसे चम्मच, कप, जग प्लास्टिक मग, टिन आदि को इस्तेमाल करते समय यह बात ध्यान में रखें कि एक विशेष वस्तु की माप केवल एक ही अमानक इकाई के द्वारा करें अर्थात भिन्न-भिन्न अमापक इकाई का इस्तेमाल न करें। आप अलग-अलग कप का इस्तेमाल करके या एक ही कप का इस्तेमाल करके चावल की माप कर सकते है परन्तु दोनों प्रकार के मापों मेंक्या अंतर है उसे ज्ञात करें। जब बच्चे अमानक इकाईयों की सहायता से आयतन की माप करने में सिद्धहस्त हो जाये तभी आप उन्हें मानक इकाईयों घन सेंटीमीटर (cc) और लीटर की सहायता से आयतन की माप करना सीखा सकते है। बच्चों को किराने की दुकान में तेल मापने वाले उपकरण से परिचित करा सकते है।

द्रव पदार्थ के आयतन की माप की मानक इकाई लीटर है। एक लीटर 100 घन सेंटीमीटर या 100 सेमी^{3} के बराबर होता है।

E-6 एक ठोस वस्तु द्वारा विस्थापित पानी की माप के द्वारा आप उस ठोस के आयतन की माप के लिए किस मापक इकाई का उपयोग करेंगे?

E-7 एक टैंक की लम्बाई 3 मी. चौड़ाई 2 मी. और ऊंचाई 1 मीटर है, इसमें कितने लीटर पानी भरा जा सकता है?

7.3.4 भार की माप

बहुत छोटी उम्र से ही बच्चे वस्तुओं के तौलने की विधि से परिचित होते हैं जब वे वस्तुओं को उठाते हैं और उनके हल्केपन या भारीपन को वे महसूस करते हैं। बच्चों को चावल, सब्जी या अन्य घरेलू सामानों को बाट और तराजू की सहायता से तौलने का शायद अनुभव हो। परन्तु प्रारम्भिक अवस्था में बच्चों को तराजू और अमापक इकाईयों जैसे पत्थर, ईंट के टुकड़े, लकड़ी या लोहे के टुकड़े आदि की सहायता से तौलने की विधि से परिचित कराना चाहिए। इस स्तर पर बच्चों को निम्न क्रियाकलापों में संलग्न रहने के लिए उत्साहित करें

- तराजू का मॉडल तैयार करना–एक छड़ी लेकर उसके दोनों सिरों पर एक-एक पलड़ा लटका कर छड़ी के बीच में एक धागा बांधे। जब दोनों पलड़ों पर समान भार की वस्तु रखते है और छड़ी के बीच में बंधे धागे की सहायता से तराजू को उठाते हैं तो छड़ी क्षैतिज अवस्था में रहती है।

टिप्पणी

- अमानक इकाईयों से भार का मापन–बच्चों को बनाये हुए तराजू के माडल और अमापक इकाईयों की सहायता से विभिन्न वस्तुओं जैसे रेत, पत्थर, बीज पत्तियां आदि को तौलने के लिए प्रोत्साहित करें। इन क्रियाकलापों के माध्यम से वे तराजू को सही ढंग से इस्तेमाल करने के कौशलों का विकास दो तरीके से करेंगे। पहले वे तराजू के तकनीकी पहलुओं को समझेंगे जैसे तराजू के दोनों पलड़ों पर सही ढंग से मापक इकाई और तौलने वाली वस्तु को रखना सीखेंगे, सही ढंग से तराजू को उठाना सीखेंगे और तराजू के पलड़े पर रखी वस्तु की मात्रा को कम या ज्यादा करके तराजू की बीम को क्षैतिज अवस्था में रखना सीखेंगे। दूसरा तराजू का उपयोग करके वे वस्तुओं को दो, चार, या आठ बराबर भागों में बांट सकते है।

जब बच्चे तराजू के माडल और अमानक इकाईयों की सहायता से वस्तुओं को तौलना सीख जायेंगे तब उन्हें मानक इकाईयों और उचित तराजू के माध्यम से वस्तु को तोलने की आवश्यकता महसूस होगी। जैसे-जैसे बच्चे बड़े होते जायेंगे उन्हें विभिन्न प्रकार की तुलाओं जैसे स्प्रिंग बैलेन्स, विद्युत तुला मशीन, और बहुत छोटी वस्तु और बहुत बड़ी वस्तु को तोलने की मशीन से परिचित कराना चाहिए।

वस्तुओं को तोलने के लिए सामान्यत: ग्राम और किलोग्राम मापक इकाईयों का इस्तेमाल किया जाता है। बच्चे, सब्जी और अन्य घरेलू सामानों की तौल के लिए इस्तेमाल किये जाने वाले इकाईयों किलोग्राम, आधा किलोग्राम (500 ग्राम) और एक पाव (250 ग्राम) से परिचित है।

7.4 मापन की मिट्रिक पद्धति

मापने के लिए मानक इकाईयों की दो मुख्य पद्धतियां है जिनका इस्तेमाल विभिन्न देशों में किया जाता है। ये है मिट्रिक पद्धति और ब्रिटिश या इम्पीरियल पद्धति। प्रत्येक पद्धति में दो प्रकार के मापन इकाईयां है–आधारभूत इकाई और विगमित इकाई। लम्बाई, द्रव्यमान और समय (इसके साथ ताप, विद्युत, प्रकाश की तीव्रता, पदार्थ की मात्रा) की इकाईयों को आधारभूत इकाईयां कहते है। मापन के अन्य क्षेत्र जैसे क्षेत्रफल, आयतन, धारिता और वेग आदि इकाई को आधारभूत इकाईयों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए क्षेत्रफल की इकाई सेमी.^{2} आयतन की इकाई सेमी.^{3} या वेग की इकाई को किमी./घंटा के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। मिट्रिक पद्धति को C–G–S (सेंटीमीटर-ग्राम-सेकंड) पद्धति या कभी-कभी M–K–S (मीटर-किलोग्राम-सेकंड) पद्धति भी कहां जाता है। इसी प्रकार ब्रिटिश पद्धति को F–P–S (फुट-पाउन्ड-सेकंड) पद्धति कहा जाता है।

मिट्रिक पद्धति को अंतर्राष्ट्रीय स्वीकृति है और इसे इकाई की अंतर्राष्ट्रीय पद्धति भी कहते है या SI Unit (SI System, international d'unites फ्रेंच रूप का, संक्षिप्तिकरण है) SI में दो व्रर्गों की इकाईयों का समावेश है जिसे अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर परिभाषित और सहमति प्रदान की गयी है। पहले वर्ग में सात आधारभूत SI इकाईयां है ये इकाई लम्बाई, द्रव्यमान, समय, ताप, विद्युत आवेश, प्रकाश की तीव्रता और पदार्थ की मात्रा, के लिए है। तथा दूसरा वर्ग SI निगमित इकाईयां है। इन निगमित इकाईयों को सात आधारभूत इकाईयों के पदों में परिभाषित किया गया

टिप्पणी

है। अन्य राशिं (जैसे कार्य, बल, शक्ति) को SI निगमित इकाईयों के पदों द्वारा व्यक्त किया जाता है।

इस भाग में हम केवल लम्बाई, धारिता और द्रव्यमान (सामान्तय: भार के रूप में इसतेमाल किया जाता है) की SI इकाईयों पर चर्चा करेंगे। क्षेत्रफल और आयतन की इकाईयां भी नजदीकी रूप से जुड़ी है और लम्बाई की इकाई को, क्षेत्रफल और आयतन की माप को, व्यक्त करने में इस्तेमाल किया जाता है। इसके बारे में हम पहले ही चर्चा कर चुके हैं।

कभी-कभी इन मापों को परंपरागत मापन पद्धति और ब्रिटिश पद्धति की संगत इकाईयों से तुलना करने का प्रयास किया जाता है जैसा कि हमारे देश में मापन के कुछ क्षेत्र में इन पद्धतियों का इस्तेमाल किया जाता है और यह आम आदमी की समझ में भी आता है।

मिट्रिक पद्धति का इतिहास

मिट्रिक पद्धति का विकास फ्रान्स में सोलहवीं और सत्रहवीं शताब्दी में हुआ और Lyons फ्रान्स के St. Paul's चर्च के Vicar Gabriel Mouten मिट्रिक पद्धति के संस्थापक जनक है। उन्होंने 1670 में मापन की दशमलव पद्धति का सुझाव दिया। 1790 में फ्रान्स की क्रांति के व्यग्र समय में फ्रांस की राष्ट्रीय विधानसभा ने फ्रान्स विज्ञान अकादमी से निवेदन किया कि सभी मापों और सभी भारों के लिए एक अपरिवर्तनीय मापक का निगमन करें। अकादमी ने तुरन्त एक आयोग का गठन किया जिन्होंने एक पद्धति की रचना की जो सरल और वैज्ञानिक थी।

- लम्बाई की इकाई पृथ्वी के परिधि का एक भाग था
- धारिता (आयतन) और द्रव्यमान के मापन के लिए लम्बाई की इकाई से, माप इकाई निगमित की जानी थी। इस प्रकार आधारभूत इकाईयों को आपस में तथा प्रकृति से संबंधित किया।
- प्रत्येक इकाई के छोटे तथा बड़े गुणकों की, आधारभूत इकाईयों को 10 से और इसके घातांक से गुणा करके या भाग करके, रचना की जानी थी।

आयोग ने लम्बाई की इकाई को metre (U.S. में इसे Meter लिखते है) नाम दिया। यह नाम ग्रीक शब्द metron से निगमित किया गया है और इसका अर्थ है 'एक माप'। मीटर के निरूपण के लिए स्थूल मापक की रचना की जानी थी ताकि यह उत्तरी ध्रुव से भूमध्य रेखा के बीच की दूरी के one ten-millionth भाग के बराबर हो। यह दूरी अक्षांश रेखा जो फ्रांस के English channel पर Dunkirk और स्पेन के बार्सिलोना से गुजरती है, के साथ हो।

एक सर्वेक्षण टीम ने दो व्यक्तियों Pierre-francois-Andre mechain और Jean-Baptiste Joseph Delambre के दिशा निर्देशन में उस चाप की माप में, जो फ्रांस के English channel पर Dunkirk और स्पेन के बर्सिलोना के बीच के अक्षांश रेखा पर बना है, 6 वर्ष व्यतीत किये। इस दूरी के मापन के समय सर्वेक्षणकर्त्ताओं को कई मुसीबतों का

टिप्पणी

सामना करना पड़ा यहां तक कि उन्हें जेल भी जाना पड़ा क्योंकि इन क्षेत्रों के नागरिक और अधिकारी उनकी उस क्षेत्र में उपस्थिति से नाराज थे और वे ये महसूस करते थे कि इनके कार्य व्यर्थ है। बाद में पता चला कि Delambre और Mechain ने पृथ्वी की गोलाई को समतलीय रूप में बदलने की प्रक्रिया का उचित विवरण नहीं दिया था। यद्यपि मिट्रिक पद्धति के लिए मीटर एक अपरिवर्तनीय मापक है और इसकी लंबाई में परिवर्तन नहीं हुआ है। यद्यपि मीटर की अधिकारिक परिभाषा इसके मापन की शुद्धता को परिमार्जित करने के लिए कई बार परिवर्तित की जा चुकी है।

इस बीच में वैज्ञानिकों को अन्य इकाईयों का निर्धारण करने का कार्य सौंपा गया जो कि मीटर पर आधारित होना था।

द्रव्यमान की प्रारम्भिक इकाई 'ग्राम' को पानी के महत्तम घनत्व के तापमान पर (लगभग 4°C) पानी के एक घन सेंटीमीटर द्रव्यमान के रूप में परिभाषित किया गया (घन जिसका प्रत्येक किनारा 0.01 मीटर हो) धारिता के लिए litre (U.S में liter लिखते हैं) को एक घन डेसीमीटर (घन का प्रत्येक किनारा 0.1 मीटर) आयतन के रूप में परिभाषित किया गया।

इकाईयों के निर्धारण करने के बाद फ्रान्स में मिट्रिक पद्धति के पक्ष और विपक्ष में कई वर्ष बीते, नेपोलियन ने एक बार इसके उपयोग पर प्रतिबंध लगा दिया था। यद्यपि फ्रान्स की सरकार ने 7 अप्रैल 1795 में मिट्रिक पद्धति को अधिकारिक तौर पर अपना लिया था। एक वैज्ञानिक गोष्ठी का आयोजन 1798 से 1799 तक किया गया (इटली, स्पेन, डेनमार्क, स्वीटजरलैंड, नीदरलैंड के प्रतिनिधियों ने भाग लिया) इसका उद्देश्य था मिट्रिक पद्धति के आधार का प्रमाणीकरण करना और मापकों का प्रारूप डिजाईन करना था। मीटर और किलोग्राम के लिए प्लेटिनम का बना हुआ स्थायी मापक तैयार किया गया। 10 दिसम्बर 1799 को फ्रान्स में इन मापकों को एक अधिनियम पारित करके, लागू किया गया।

यद्यपि पहले मिट्रिक पद्धति को उत्साहपूर्वक स्वीकार नहीं किया गया, फ्रान्स द्वारा इसके उपयोग को 1840 में अनिवार्य बनाये जाने के बाद कई देशों ने इसे धीरे-धीरे अपनाना प्रारम्भ किया। दुनिया के अधिकतर देशों ने 1950 और 1960 के दशक में मिट्रिक पद्धति को अपना लिया था। लेकिन कुछ देश अभी भी मिट्रिक पद्धति, जिसमें U.S.A. भी शामिल है, को नहीं अपनाया है।

मिट्रिक पद्धति में माप और तौल को भारतीय लोकसभा ने दिसम्बर 1956 में अपनाया, इसके लिए माप और तौल मानक अधिनियम पारित किया गया और यह 1 अक्टूबर 1958 से हमारे देश में लागू है।

मिट्रिक पद्धति में S-मिट्रिक पद्धति में उप-इकाईयों (छोटे-इकाई) को इकाई के भाग के रूप में लेते हैं तथा उच्च-इकाईयों (बड़ी-इकाई) को इकाई के 10 गुना, 100 गुना के रूप में लेते है। इस प्रकार का निरूपण परिकलन को सुविधाजनक बनाता है।

यह पद्धति निम्न प्रकार से है:

उच्च-इकाईयां

किलो इकाई = 1000 इकाईयां
हेक्टो इकाई = 100 इकाईयां
डेका इकाई = 10 इकाईयां

इकाई

उप-इकाईयां

डेसी इकाई = $\frac{1}{10}$ इकाई
सेंटी इकाई = $\frac{1}{100}$ इकाई
मिली इकाई = $\frac{1}{1000}$ इकाई

आओ देंखे कि मिट्रिक पद्धति की इस संरचना को लम्बाई, धारिता और द्रव्यमान (भार) के इकाईयों को परिभाषित करने में किस प्रकार इस्तेमाल किया गया है।

लम्बाई की माप के लिए इकाई– मिट्रिक पद्धति में लम्बाई की माप की इकाई 'मीटर' है (meter या metre)

उच्च-इकाईयां

किलोमीटर (km) = 1000 मीटर
हेक्टोमीटर (hm) = 100 मीटर
डेकामीटर (dam) = 10 मीटर

इकाई : मीटर (m)

उप-इकाईयां

डेसीमीटर (dm) = $\frac{1}{10}$ मीटर
सेंटीमीटर (cm) = $\frac{1}{100}$ मीटर
मिलीमीटर (mm) = $\frac{1}{1000}$ मीटर

इनमें से किलोमीटर, मीटर और सेंटीमीटर का उपयोग लम्बाई की माप करने के लिए किया जाता है और सामान्यत: सभी लोग इसे समझ लेते है। यद्यपि हमारे देश में मिट्रिक पद्धति को 1958 में अपना लिया गया था फिर भी लम्बाई की माप की इकाई जैसे इंच (= 2.54 से.मी), फुट (= 12 इंच) और गज (=3 फुट) का उपयोग अभी भी, लम्बाई के मापन, जैसे भूमि का माप करने, दर्जी द्वारा कपड़े की माप करने में इस्तेमाल किया जाता है।

धारिता की माप के लिए इकाई : यह एक सामान्य अनुभव है कि द्रव पदार्थ का कोई निश्चित आकार नहीं होता है। जिसे पात्र में इसे रखा जाता है यह उसी को आकार धारण कर लेता है। इसलिए द्रव पदार्थ की मात्रा की माप के लिए हम तौल की इकाई या आयतन माप की इकाई का इस्तेमाल करते है।

धारिता की माप की इकाई 'लीटर' है (अर्थात आयतन की माप)

आयतन-इकाई को 1 लीटर (1000 सेमी.^{3} के बराबर) के रूप में जाना जाता है। अलग-अलग पात्र अलग-अलग धारिता माप के बने होते है।

उच्च-इकाईयां

किलोलीटर (kλ) = 1000

हेक्टोलीटर (hλ) = 100

डेकालीटर (daλ) = 10

इकाई : लीटर (λ)

उप-इकाईयां

डेसीलीटर (dλ) = $\frac{1}{10}$ λ

सेन्टीलीटर (cλ) = $\frac{1}{100}$ λ

मिलीलीटर (mλ) = $\frac{1}{1000}$ λ

दूध, पानी और तेल जैसे द्रव पदार्थो को मापने के लिए लीटर का उपयोग किया जाता है।

द्रव्यमान की माप के लिए इकाई : द्रव्यमान या भार की माप के लिए मूल इकाई 'ग्राम' है। अन्य उच्च इकाईयां और उप-इकाईयां निम्न प्रकार से है।

उच्च-इकाईयां

किलोग्राम (kg) = 1000 ग्राम

हेक्टोग्राम (hg) = 100 ग्राम

डेकाग्राम (dag) = 100 ग्राम

इकाई : ग्राम (g)

उप-इकाईयां

डेसीग्राम (dg) = $\frac{1}{10}$ ग्राम

सेंटीग्राम (cg) = $\frac{1}{100}$ ग्राम

मिलीग्राम (mg) $\frac{1}{1000}$ ग्राम

इनमें से किलोग्राम, ग्राम, और मिलीग्राम इकाईयों का इस्तेमाल सामान्यत: किया जाता है। द्रव्यमान की इन इकाईयों के अतिरिक्त क्विंटल और मिट्रिक टन इकाईयों का इस्तेमाल भारी पदार्थों की तौल में किया जाता है। 1 क्विंटल = 100 कि.ग्रा. और 1 टन = 1000 kg। अपनी प्रगति की जांच करें।

E-8 मापन की ब्रिटिश पद्धति की अपेक्षा मिट्रिक पद्धति के क्या मुख्य लाभ है? वर्णन करें।

E-9 यदि 1 किलोग्राम चावल की कीमत 25 रुपये है तो 5 क्विंटल चावल की कीमत बताइये। यदि चावल की इस मात्रा को 20 कि.ग्रा. वाले छोटे पैकेट में पैक किया जाये तो ऐसे पैकेटों के कितने पैक बनाये जा सकते है?

7.5 समय का मापन

समय की माप पृथ्वी के अपने अक्ष पर घूमने और इसके सूर्य के चारों ओर परिक्रमा करने से संबंधित है।

लगातार दो सूर्योदय के बीच के समय को सामान्यत: एक दिन के रूप में जाना जाता है। परन्तु वैज्ञानिक लगातार दो मध्य रात्रियों के बीच के समय को एक दिन के रूप में गणना करते है। इस प्रकार एक दिन एक मध्य रात्रि को प्रारम्भ होता है और दूसरे मध्य रात्रि में समाप्त होता है। इस अवधि को एक सूर्य-दिवस के रूप में जाना जाता है।

> पृथ्वी द्वारा अपने अक्ष पर एक चक्कर पूरा करने में लिए गये समय को एक सूर्य-दिवस समय कहते है

एक पूर्ण चक्कर की, डिग्री-माप पद्धति में माप 360° होता है।

समय-माप और डिग्री-माप (दोनों घूर्णन से संबंधित है) के बीच में सांमजस्य स्थापित करने के लिए 360 के उप-गुणकों के आधार पर इकाई-विभाजन किया गया।

इस प्रकार एक सूर्य-दिवस की अवधि को 24 बराबर भागों में विभाजित किया गया और प्रत्येक भाग को एक घंटे के रूप में जाना जाता है। 1 घंटा = 60 मिनट और 1 मिनट को 60 सेकंड के बराबर माना गया है।

इस प्रकार

1 सूर्य-दिवस = 24 घंटे

1 घंटा = 60 मिनट

1 मिनट = 60 सेकंड

सूर्य वर्ष : पृथ्वी सूर्य की एक परिक्रमा करने में जितना समय लेता है उसे एक सूर्य वर्ष कहते है।

एक सूर्य वर्ष और एक सूर्य दिवस में संबंध 1 सूर्य वर्ष = 365 दिन 5 घंटे, 48 मिनट 47 सेकंड

1 सूर्य वर्ष = $365^1/_4$ दिन

एक कैलेन्डर वर्ष में 365 दिन होते है

इस प्रकार प्रत्येक वर्ष 6 घंटे की कमी होती है अर्थात $^1/_4$ दिन अत: वर्षों में 1 दिन की कम हो जाता है, इसे पूरा करने के लिए प्रत्येक 4 वर्ष में, एक वर्ष में 366 दिन रखा जाता है और उस वर्ष को लीप वर्ष कहते हैं।

जो वर्ष 4 से पूर्ण रूप से विभाजित हो जाता है वह लीप वर्ष होता है। और उस वर्ष फरवरी में 28 दिन के बजाय 29 दिन होते हैं। इस प्रकार एक कैलेंडर में जनवरी, मार्च, मई, जुलाई,

टिप्पणी

अगस्त, अक्टूबर और दिसम्बर प्रत्येक मास में 31 दिन होते है। मास अप्रैल, जून, सितम्बर और नवम्बर में 30 दिन होते है और फरवरी में 28 दिन (लीप वर्ष में 29 दिन) होते है। बच्चे कैलेन्डर मासों के दिनों की संख्या को विभिन्न तरीके से आसानी से याद कर सकते हैं। इनको गानों के रूप में याद करना एक मनोरंजक तरीका है।

महीनों के गीत

सितंबर, अप्रैल, जून, नवम्बर
के होते हैं दिन तीस
फरवरी के होते है दिन अट्ठाईस
पर लीप वर्ष में होते हैं दिन उनतीस
बाकी सब महीनों के होते है दिन इकतीस

अपवाद : ऐसे वर्ष अंक जिनमें इकाई और दहाई के स्थान पर '0' (शून्य) हो वह 4 से विभाजित तो है परन्तु वे लीप वर्ष नहीं होते हैं। परन्तु इनमें से ऐसे वर्ष जो 400 के गुणक है वे लीप वर्ष होते हैं।

इस प्रकार 2000 लीप वर्ष है परन्तु 1900, 1800, 2200, 2300 आदि लीप वर्ष नहीं हैं।

घड़ी में समय : दो प्रकार की घड़ी होती हैं जिसके द्वारा समय का निर्धारण किया जाता है।

ये घड़ी हैं– 12 घंटा-घड़ी और 24 घंटा-घड़ी। सामान्यत: हम 12 घंटा-घड़ी का इस्तेमाल करते हैं। इस प्रकार की घड़ी में डायल पर 1 से 12 तक घंटो के निशान बने होते है। घंटे की सुई 12 घंटे में एक चक्कर पूरा करती है और मिनट की सुई 1 मिनट में एक चक्कर पूरा करता है।

मध्य रात्रि और दोपहर को 12 से निरूपित किया जाता है। हम कहते हैं 12 मध्य रात्रि या 12 दोपहर 12 मध्यरात्रि और 12 दोपहर के मध्य की अवधि को AM के रूप में चिन्हित करते है, जैसे सुबह 5 बजे को 5 am या 6.30 am या 8 am और 12 बजे दोपहर से 12 बजे मध्यरात्रि के बीच की अवधि को PM से चिन्हित करते हैं। जैसे दोपहर 4 pm या शाम को 7 pm

- 24 घंटे वाली घड़ी का इस्तेमाल रेलवे और वायुयान में किया जाता है।

  मध्यरात्रि को 24 घंटा से निरूपित किया जाता है तथा उसके बाद के घंटों को 1 घंटा, 2 घंटा, 3 घंटा... और इसी प्रकार अगले मध्यरात्रि तक गणना करते हैं इसमें am और pm के इस्तेमाल करने की आवश्यकता नहीं होती है। इस पद्धति में घड़ी के डायल पर 1 से 24 तक संख्यांक लिखे होते हैं और घंटे की सुई 24 घंटे में घड़ी के डायल पर एक चक्कर पूरा करता है।

समय की समझ : बच्चा कैलेंडर या घड़ी को पढ़ना सीखे उससे पहले उनमें समय की समझ का विकास करना जरूरी है अर्थात भूत, वर्तमान और भविष्य की समझ। जब बच्चे 6 वर्ष की उम्र में पहली बार स्कूल आते है तो उनमें काफी हद तक समय की समझ का विकास हो चुका

होता है। वे बात कर सकते है कि कल क्या हुआ? अभी क्या कर रहे हो? कल क्या करोगे? बीते हुए कल, आज और आने वाले कल के विचार के साथ बच्चों से बातचीत प्रारम्भ करके आप उन्हें पिछले महीने या पिछले वर्ष या कुछ वर्ष पूर्व के घटनाओं को क्रम से व्यवस्थित करके उनमें समय की समझ विकसित करें। इसी प्रकार उनके साथ ऐसे कार्यक्रमों की सूची बना सकते है जिसे आप बच्चों के साथ मिलकर आने वाले कल, अगले सप्ताह या अगले माह पूरा करेंगे। इन सबके लिए आप बच्चों से औपचारिक और अनौपचारिक रूप से विभिन्न समयावधि में घटित घटनाओं के बारे में बात करें और प्रश्न करें।

कुछ इस प्रकार के प्रश्न निम्न प्रकार से है–

- आज कौन सा दिन है?
- कल कौन सा दिन था? या कल कौन सा दिन होगा?
- आज कौनसा बच्चा आपकी कक्षा में अनुपस्थित है?
- कल कौन अनुपस्थित था?
- कल आपकी कक्षा में गणित कौन से पीरियड में पढ़ाया जायेगा?
- कौन बड़ा है आप या आपका दोस्त?

समय से संबंधित जितनी अधिक बातें आप बच्चों के साथ करेंगे उतनी ही उनकी समय की समझ तेज होगी। इन बातों के अतिरिक्त बच्चों को ऐसी स्थितियां उपलब्ध कराये जिनमें वे बीते हुए दिनों की 2 या 3 घटनाओं को क्रम से व्यवस्थित करे या आने वाले दिनों में होने वाले कार्यक्रम को व्यवस्थित करने को कहें। दूसरों शब्दों में समय रेखा पर घटनाओं को व्यवस्थित करने का प्रयास बच्चे करते है। जब वे सफलतापूर्वक घटनाओं को व्यवस्थित कर लेते है तब आप उन्हें घड़ी और समय की गणना करने से परिचय करायें।

क्षण और समयावधि :

समय की रिकार्डिंग आपकी जरूरत के ऊपर निर्भर करती है आप घटनाओं की किस समयावधि की रिकार्डिंग करना चाहते है?

उदाहरण के लिए निम्नांकित 3 स्थितियों का अध्ययन करें।

1. भारत को आजाद हुए कितने वर्ष बीत गये है?
2. आपके दो मित्रों सीमा और स्नेहा की आयु में कितना अंतर है।
3. कक्षाकक्ष में गणित की परीक्षा में प्रश्नों के पूरे उत्तर देने में रोहित को कितना समय लगा?
   पहले प्रश्न में यह जानना जरूरी है कि भारत किस वर्ष में स्वतंत्र हुआ (1947 A.D.) और वर्तमान वर्ष (2011 AD) इन दोनों के बीच अंतर की गणना आपको करना है। आप 2011 में से 1947 को घटाकर आप वांछित उत्तर प्राप्त कर सकते है।

टिप्पणी

दूसरी स्थिति में आपको अपने मित्रों की जन्मतिथि दिनांक, मास और वर्षों में जानकारी होना आवश्यक है। यह पहले प्रश्न से थोड़ा ज्यादा कठिन है।

मान लो कि दोनों मित्रों की जन्मतिथि इस प्रकार से है।

सीमा 18 अक्टूबर 1999 में पैदा हुई तथा स्नेहा 12 सितंबर 2000 को पैदा हुई। आप दोनों की आयु में अंतर को दो प्रकार से गणना कर सकते हैं। (i) एक निश्चित तिथि को माना। अप्रैल 2012 को) उनकी वर्तमान आयु की गणना करें और दोनों की वर्तमान आयु के बीच अंतर ज्ञात करें। (ii) उनकी जन्मतिथि के बीच के अंतर की गणना करें जो उनकी किसी भी क्षण में आयु के बराबर होगी।

दोनों की आयु में अंतर की गणना करने के लिए हम दूसरी विधि का उपयोग करते हैं।

इसके लिए दोनों के जन्मतिथि को दिन, महीने और वर्ष को निम्नांकित तरीके से लिखेंगे।

	वर्ष	मास	दिन
स्नेहा	2000	09	12
सीमा	1999	10	18
	00	10	24

आपने मास और दिनों के अंतर को किस प्रकार ज्ञात किया, उसकी व्याख्या कर सकते हैं। इस स्थिति में 12 दिन 18 दिन से कम है अत: मास अंक (09) से 1 मास (30 दिन) उधार लिया और इसको दिन में जोड़ा (30+12=42 दिन) फिर इसमें से 18 दिन कम किये (42-18)=24 दिन। फिर से 8 मास, 10 मास से कम है और 8 में से 10 घटा नहीं सकते अत: 1 वर्ष उधार लिया (=12 मास) और उसे 08 मास में जोड़ा (12+8) = 20 मास फिर उसमें से 10 मास घटाया तो (20−10) = 10 मास प्राप्त किया। इस प्रकार हमने दोनों की जन्मतिथि के बीच के अंतर की गणना की और इसके आधार पर हम कह सकते है कि सीमा स्नेहा से 10 महीने और 24 दिन बड़ी है।

संक्षेप में विद्यार्थियों में समय मापन के कौशल विकसित करने के लिए आपको कई प्रकार के क्रियाकलापों की योजना बनाने की आवश्यकता है जिनमें सही ढंग से घड़ी से समय की माप करना, समय को am और pm में बताना, तथा दो घटनाओं के बीच के समयांतर की गणना करना।

अपनी प्रगति की जांच करें

E-10 रमा कालेज के हॉस्टल के लिए 11.11.1911 की सुबह को घर से चली और 12.12. 2012 की रात्रि को वापस घर पहुंची। रमा घर से कितनों दिनों के लिए बाहर रही?

E-11 निम्नांकित वर्षों में से लीप वर्षों की पहचान करें

1536, 1600, 1682, 1700, 1820, 1980, 2000, 2006, 2012

टिप्पणी

E-12 10 जनवरी 2008 को विद्यालय भवन की मरम्मत का कार्य शुरू हुआ तथा लगातार 65 दिनों तक मरम्मत कार्य चला। किस दिन मरम्मत का कार्य समाप्त हुआ?

7.6 सारांश

- मापन वस्तु के कुछ विशेष पहलुओं को मात्रात्मक रूप में प्रदर्शित करना है जिसे उसी प्रकार के समान वस्तु के विशेष पहलुओं की तुलना करके प्राप्त किया जाता है।
- लम्बाई एकविमीय है, जबकि क्षेत्रफल और आयतन क्रमशः द्विविमीय और त्रिविमिय वस्तुओं से संबंध रखते हैं।
- अमानक इकाईयां जैसे शरीर के अंग, स्थानीय उपलब्ध पदार्थ से मापन करना उतना शुद्ध नहीं होता है जितना कि मानक इकाईयों के साथ मापन करने से शुद्ध परिणाम प्राप्त होता है परन्तु नौसिखियों के लिए अ-मानक इकाईयां अर्थपूर्ण और लाभप्रद होती हैं क्योंकि इनसे वे मापन इकाई की अवधारणा को तथा मापन की विधियों को समझने में परिपक्व होते हैं।
- बच्चों को मापक इकाईयों द्वारा लम्बाई, आयतन, क्षेत्रफल धारिता और द्रव्यमान की मापन विधि से परिचित कराने से पहले आप उन्हें वस्तुओं की विशेषताओं को मापने की विधि से परिचित करायें। जब बच्चे मानक इकाईयों का उपयोग करना सीखते हैं तो आप उन्हें अ-मानक इकाईयों द्वारा वस्तुओं के मापन के अनुभवों को भी उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित करें।
- प्रत्येक बच्चे को विद्यालय में मानक इकाईयों द्वारा, अर्थात मिट्रिक पद्धति द्वारा मापन, लम्बाई, क्षेत्रफल, आयतन धारिता और भार के मापन कौशल अर्जित करने के लिए उपयुक्त अवसर प्रदान करना चाहिए। उन्हें इकाईयों, उप-इकाईयों, उच्च इकाईयों द्वारा मापन करने के लिए आवश्यक कौशल विकसित करने के लिए भी प्रोत्साहित करना चाहिए।
- मिट्रिक पद्धति को मापन के लिए अंतर्राष्ट्रीय मानक (SI) के रूप में स्वीकार किया गया है इसमें सात मूल इकाईयों को लम्बाई, द्रव्यमान, समय, तापमान, विद्युत आवेश, प्रकाश की तीव्रता, और पदार्थ की मात्रा मापन के लिए शामिल किया गया है।
- समय को सूर्य वर्ष, सूर्य मास, दिन, घंटा, मिनट और सेकंड के पदों में मापा जाता है।
- बच्चों को घटनाओं के समय रिकार्ड करने के लिए और घटनाओं के बीच की समयावधि की गणना करने के लिए आवश्यक कौशल विकसित करने के लिए अवसर प्रदान करना चाहिए।

7.7 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर

E-1 कोई तीन अंतरों का वर्णन करें

टिप्पणी

E-2 ये सभी सही है, पूरी दुनिया में एकरूप है और वैज्ञानिक मापन में इनका उपयोग किया जाता है

E-3 उदाहरण का वर्णन करें

E-4 अ-मानक इकाईयों से बच्चे परिचित होते है अंत: उनके लिए अर्थपूर्ण है और बच्चे उन्हें आसानी से व्यवस्थित कर लेते है इससे उन्हें मानक इकाईयों को समझने में सहायता मिलती है।

E-5 (A) 8 से.मी.^{2} (B) 9 सेमी.^{2} (C) 24 सेमी.^{2}

E-6 घन सेंटीमीटर (लीटर में नहीं क्योंकि यह धारिता मापन की इकाई है या द्रव मापन की इकाई है)

E-7 6000 लीटर

E-8 मिट्रिक पद्धति में उच्च इकाईयों और उपइकाईयों को मापन की मूल इकाई के 10 के गुणकों या उपविभाजन में व्यक्त किया जाता है।

E-9 12500.00 रुपये, 25 पैकों में

E-10 398 दिन

E-11 1536, 1600, 1820, 2000 और 2012

E-12 14 मार्च 2008

7.8 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

IGNOU (2008) प्राथमिक कक्षाओं में गणित शिक्षण (vol : 5) : मापन नई दिल्ली IGNOU

NCERT पाठ्यपुस्तक कक्षा IV, V, VI, VII

7.9 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1. 'तुलना करने की विधि' विभिन्न वस्तुओं के मापन करने के लिए एक माध्यम है। वर्णन करें

2. मापन के मापक और अमानक इकाईयों की उपयोगिता और प्रकृति की तुलना उपयुक्त उदाहरण के साथ करें।

3. लम्बाई, द्रव्यमान और समय की मिट्रिक इकाईयों को SI मूल इकाईयां और अन्य इकाईयों जैसे क्षेत्रफल, आयतन, धारिता और पदार्थ की मात्रा को, निगमित इकाईयां क्यों समझा जाता है?

इकाई 8 : आँकड़ों का प्रबंधन

संरचना

8.1 प्रस्तावना

आप जानते हैं कि विकास के क्रियाकलापों की योजना बनाने के लिए कई दृष्टिकोणों, जैसे भूमि, राजस्व, कृषि उत्पाद, मानव शक्ति, आदि, की जानकारी अथवा आँकड़े नियमित अंतरालों

पर संग्रहित किये जाते हैं तथा विभिन्न स्तरों पर उनके अभिलेख रखे जाते हैं। अपने दैनिक जीवन में भी आपने देखा होगा कि संख्याओं, आकृतियों, नामों आदि से संबंधित कई प्रकार के आँकड़ों का संग्रह तथा उपयोग किया जाता है। सभी विकासशील क्रियाकलापों, जिनमें विद्यालयी शिक्षा भी सम्मिलित है, के प्रबंधन में आंकड़ों का संग्रह करना, उनकी व्यवस्था करना तथा उन आंकड़ों से निष्कर्ष निकालना तथा विभिन्न समस्याओं के सुलझाने में उनका उपयोग करना ये सभी नियमित विशिष्ट स्थान रखते हैं। प्राय: बच्चे भी ऐसे क्रियाकलापों में व्यस्त रहते हैं जिनमें आँकड़ों को संभालने के मौलिक ज्ञान की आवश्यकता होती है। वे स्वयं भी अपने खेलों तथा क्रियाकलापों के माध्यम से आँकड़ों की उत्पत्ति करते हैं। इस प्रकार बच्चों की सहायता के लिए हमें कुछ ऐसे कौशलों की आवश्यकता है जो आंकड़ों को सम्भालने में लाभप्रद हों।

इस इकाई में हम प्रारंभिक कक्षाओं के लिए वांछित आंकड़ों को संभालने के परिचय में निहित मूल अवधारणाओं के विषय में चर्चा करेंगे।

इस इकाई को पूरा करने में आपको लगभग 07 (सात) अध्ययन घंटों की आवश्यकता होगी।

8.2 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि

- आंकड़ों को संग्रहित करने तथा वर्गीकृत करने का विवरण दे सकें।
- आंकड़ों को तालिकाओं तथा ग्रॉफों में निरुपित कर सकें।
- आंकड़ों के विभिन्न प्रकार के ग्रॉफ जैसे चित्रालेख, दंडालेख, आयत चित्र तथा पाई चार्ट तैयार कर सकें।
- आंकड़ों के निरुपण से निष्कर्ष निकाल सकें।

8.3 आंकड़ों का संग्रह एवं निरुपण

हमारे दैनिक जीवन में हमें अपनी विभिन्न आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए जानकारी सग्रहित करनी पड़ती है। जब आपको अपना मासिक वेतन मिलता है, तो आपको अपने मासिक व्यय की योजना बनाने की आवश्यकता होती है। प्राय: आप व्यय के विभिन्न मदों, जैसे दैनिक उपयोगी वस्तुओं की खरीदारी, बिजली के बिलों का भुगतान, वस्त्रों की खरीदारी, बच्चों का शिक्षा-शुल्क, दवाइयों पर व्यय तथा यात्रा व्यय की सूची तैयार करते हैं। इन वस्तुओं के अनुमानित व्यय तैयार करने के लिए आप प्राय: अंतिम कुछ महीनों में इन पर किये गए व्यय को देखते हैं। संक्षेप में, आप पिछले महीनों के विभिन्न मदों पर किये गए व्यय की जानकारी चालू मास के लिए योजना बनाने हेतु संग्रहित करते हैं।

एक शिक्षक के रूप में आप कई आंकड़ों की कुछ जानकारी का दैनिक, साप्ताहिक, मासिक,

त्रैमासिक, वार्षिक आधार पर संग्रह कर रहे हैं जैसे किसी शैक्षिक वर्ष में प्रत्येक कक्षा में भर्ती किये गए बच्चों की संख्या, प्रत्येक कक्षा में लड़के, लड़कियों की संख्या, प्रत्येक कक्षा में अनुसूचित जाति तथा जनजाति के बच्चों की संख्या, प्रतिदिन उपस्थित बच्चों की संख्या, एक मास के कार्य-दिवसों की संख्या, वेतनों पर मासिक व्यय, इत्यादि। ये सभी जानकारियां संख्याओं में व्यक्त की जाती हैं। वांछित जानकारी के संख्यात्मक वर्णन को 'आंकड़े' कहा जाता है। अतएव, 'आंकड़े' संख्याओं का एक संग्रह है जिसे कुछ लाभप्रद जानकारी के लिए प्राप्त किया जाता है।

क्रियाकलाप 1

ऐसी जानकारियों की एक सूची तैयार कीजिए जिन के संग्रह की आपको अपने विद्यालय में दैनिक तथा वार्षिक रूप में आवश्यकता होती है।

....

....

....

आंकड़ें विभिन्न स्रोतों से प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष रूप से संग्रहित किये जा सकते हैं। संग्रहित आंकड़ों को सुव्यवस्थित रूप में लगाना होता है जिससे उनके आगे के प्रयोगों में सुविधा हो। हमें आंकड़ों का संग्रह करना, उन्हें सारणीबद्ध करना तथा उन्हें चित्रीय रूप में रखना सीखना है। आंकड़ों के संग्रह, क्रमबद्ध लगाने तथा प्रस्तुतीकरण से हमें अपने अनुभवों को संगठित करने तथा उनसे निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।

8.3.1 आंकड़ों का संग्रह

आंकड़े ऐसी जानकारी है जो किसी संबंधित परिणाम निकालने के उद्देश्य से एक क्रमबद्ध तरीके से संग्रहित किये जाते हैं। आइए आंकड़ों के संग्रह के स्रोतों पर चर्चा करें। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए।

उदाहरण 1 : कक्षा VII के विद्यार्थी किसी पिकनिक के लिए तैयारी कर रहे हैं। कक्षा-अध्यापक ने उनसे सेव, सन्तरा, केला तथा आमरुद में से अपनी पसंद के फल के विषय में पूछा। अध्यापक ने व्यक्तिगत रूप से छात्रों से पूछकर एक सूची तैयार की जिससे अध्यापक को छात्रों की पसंद के अनुसार फलों को बांटने में सहायता मिलेगी।

यहां पर आंकड़ों को सीधे उदगम (स्रोत) से अर्थात् विद्यार्थियों से संग्रहित किया गया है। यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें आंकड़े उनके प्रारंभिक स्रोत से संग्रहित किये गए हैं।

उदाहरण 2 : मान लीजिए कि हम किसी कस्बे/गांव में विभिन्न आय-वर्गों में व्यक्तियों की संख्या जानना चाहते हैं।

टिप्पणी

यहां आय-वर्गों के विषय में जानकारी के स्रोत नगर पालिका/पंचायत के कार्यालय में प्राप्त अभिलेख (जनगणना रिपोर्ट) हैं। यह जानकारी का स्रोत प्रत्यक्ष (सीधा) नहीं है। इस प्रकार, आंकड़े, जिन्हें अप्रत्यक्ष रूप अर्थात ऐसे जानकारी रखने वाले अभिलेखों, जिन्होंने वह जानकारी किसी अन्य उद्देश्य के लिए संग्रहित की थी, से संग्रहित किया जाए, **गौण आंकड़े** कहे जाते हैं। विभिन्न स्रोतों से संग्रहित आंकड़े, जिन्हें किसी भी ढंग से व्यवस्थित अथवा संगठित न किया गया हो, **यथा प्राप्त आंकड़े** कहा जाता है।

उदाहरण 3 : किसी मैचों की जांच-श्रेणी की विभिन्न पारियों में तेंदुलकर द्वारा बनाए गए रन हैं : 16, 56, 25, 8, 3, 33, 23, 107।

यहां रनों को किसी रूप में संगठित नहीं किया गया है और इसीलिए यह यथा प्राप्त आंकड़ों का एक उदाहरण है।

जब किसी पहलू के आधार पर आंकड़ों को वर्गों में व्यवस्थित किया जाता है, तो उसे विवरण (बंटन) कहते हैं। जानकारी के विभिन्न पहलूओं जैसे अंक, आयु, ऊंचाई, आय, आदि को बताने वाली संख्याएं बंटन के प्राप्तांक कहे जाते हैं। **यथा प्राप्त आंकड़ों** को संग्रह के उपरान्त संगठित किया जाता है।

8.3.2 आंकड़ों का सारणीबद्ध निरुपण

यदि यथा प्राप्त आंकड़े अंकों के रूप में हैं, तो हम उन्हें आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। तब इन्हें व्यवस्थित आंकड़े कहा जाता है।

उदाहरण 4 : यथा प्राप्त आंकड़े : किसी इकाई-टेस्ट (पूर्णांक-25) में 12 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किये गए अंक है।

16, 7, 23, 10, 18, 9, 21, 20, 12, 17, 16, 21

व्यवस्थित आंकड़े : 7, 9, 10, 12, 16, 16, 17, 18, 20, 21, 21, 23 (आरोही क्रम में व्यवस्थित)

क्रियाकलाप 2

(1) उपर्युक्त आंकड़ों को अवरोही क्रम में लगाइए।

....

....

....

(2) 88, 25, 16, 43, 7, 70, 16, 34, 61, 52, 97 को आरोही तथा अवरोही क्रमों में लगाइए।

....

....

....

नोट : समान अंकों को क्रमानुसार साथ-साथ रखा जाता है।

जब आंकड़ों की एक बहुत बड़ी संख्या को **व्यवस्थित रूप** में रखा गया हो, तो उनसे निष्कर्ष निकाल पाना कठिन होता है। अत: हमें अंकों को विभिन्न तरीकों में व्यवस्थित करना जिससे बंटन का सही चित्रण स्पष्ट हो तथा निष्कर्ष निकालना सरलतर हो। आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5 : एस्मा ने अपनी कक्षा के विद्यार्थियों के जूतों के साइज के लिए आंकड़े संग्रहित किए जो नीचे दिए गए हैं।

5	4	7	5	6	7	6	5	6	6
4	5	6	8	7	4	6	5	6	4
5	7	6	7	5	6	6	4	8	7

एस्मा ने मिलान-चिन्हों का प्रयोग करके निम्नलिखित सारणी तैयार की।

सारणी 8.1 : जूतों के साइज

जूतों के साइज	*मिलान चिन्ह*	*विद्यार्थियों की संख्या (f)*
4	卌	5
5	卌 ||	7
6	卌 卌	10
7	卌 |	6
8	||	2
	योग	30

अब सारणी से निष्कर्ष निकालना सरलतर होगा।

क्या आप जानते है?

- *दंड-चिन्ह, जो किसी अंक के घटित होने की संख्या को निरुपित करता है, को मिलान-चिन्ह कहा जाता है।*
- *किसी विशेष अंक अथवा अंक-समूह के घटित होने की संख्या को (अंक अथवा अंक समूह की)* ***बारंबारता*** *(f) कहा जाता है।*
- *उपर्युक्त उदाहरण* ***अवर्गीकृत बारंबारता बंटन*** *का उदाहरण है।*

टिप्पणी

क्रियाकलाप

- *निम्नलिखित आंकड़ों का संग्रह कीजिए तथा एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए :*

  (a) किसी कक्षा में विद्यार्थियों की आयु

  (b) किसी कक्षा के विद्यार्थियों की ऊंचाई

....

....

....

आइए, यथा प्राप्त आंकड़ों को व्यवस्थित करने के एक अन्य प्रकार का अवलोकन करें।

उदाहरण 6 : गणित के एक टेस्ट में कक्षा VI के 40 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक हैं :

8, 48, 55, 52, 78, 42, 93, 85, 7, 37, 94, 66, 72, 73, 66, 91, 52, 78, 85, 9, 68, 81, 64, 60, 75, 84, 78, 10, 63, 21, 14, 30, 19, 25, 93, 33, 15, 29, 25, 13

आरोही क्रम में लगाने पर अंकों पर बंटन (व्यवस्थित रूप में) हो जाता है :

7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 19, 21, 25, 25, 29, 30, 33, 37, 42, 48, 52, 52, 55, 60, 63, 64, 66, 66, 68, 72, 73, 75, 78, 78, 78, 81, 84, 85, 85, 91, 93, 93, 94.

अंकों की बहुत बड़ी संख्या को इस ढंग से व्यवस्थित करने पर किसी प्रवणता के अवलोकन में बहुत अधिक सहायता नहीं मिलती। इसी प्रकार इन अंकों को एक अवर्गीकृत बारंबारता बंटन में लगाने पर भी हमें कोई खास फायदा नहीं होगा।

आइए इन अंकों को व्यवस्थित करने का एक अन्य ढंग सोचें।

इस व्यवस्था में, हम अंकों को उनकी अपनी बारंबारता के साथ व्यक्तिगत रूप से रखने के स्थान पर उनके ग्रुप (अथवा थैलियां) बनाते हैं तथा इस बंटन के अंकों को उन ग्रुपों में रखते हैं। उदाहरण के लिए मान लीजिए 10 अंकों 10,11,12,13,14,15,16,17,18 तथा 19 का एक ग्रुप है अथवा छोटे रूप में हम ग्रुप का निरुपण 10–19 के रूप में कर सकते है जिसे वर्ग अंतराल (व.अ.) पुकारा जाता है। इस वर्ग अंतराल का साइज अथवा इसकी लंबाई अर्थात वर्ग अंतराल को बनाने वाले क्रमागत अंकों की संख्या 10 है।

हमारे बंटन के कितने अंक इस वर्ग अंतराल के अंतर्गत आते हैं? बंटन के केवल 5 अंक अर्थात 10,13,14,15 तथा 19 वर्ग-अंतराल 10–19 में हैं। बंटन के अंकों को व्यवस्थित करने की प्रक्रिया नीचे दी गयी है :

इस बंटन में, अंकों का परिवार न्यूनतम 7 से अधिकतम 94 तक है।

बंटन में अंकों का परिवार अथवा केवल परिसर = अधिकतम अंक–न्यूनतम अंक

= 94–7 = 87

परिसर वर्ग अंतरालों की लंबाई तथा उनकी संख्या का निर्णय करने में हमारी सहायता करता है।

यदि हम वर्ग अंतराल की लंबाई 10 लें, तो वर्ग अंतरालों की संख्या 10 होगी।

सारणी-8.2 वर्गीकृत बारंबारता बंटन

<table>
<tr><th>वर्ग अंतराल (व.अ.)</th><th>मिलान-चिन्ह</th><th>बारंबारता (f)</th></tr>
<tr><td>0-9</td><td>|||</td><td>03</td></tr>
<tr><td>10-19</td><td><s>||||</s></td><td>05</td></tr>
<tr><td>20-29</td><td>||||</td><td>04</td></tr>
<tr><td>30-39</td><td>|||</td><td>03</td></tr>
<tr><td>40-49</td><td>||</td><td>02</td></tr>
<tr><td>50-59</td><td>|||</td><td>03</td></tr>
<tr><td>60-69</td><td><s>||||</s> |</td><td>06</td></tr>
<tr><td>70-79</td><td><s>||||</s> |</td><td>06</td></tr>
<tr><td>80-89</td><td>||||</td><td>04</td></tr>
<tr><td>90-99</td><td>||||</td><td>04</td></tr>
<tr><td></td><td>योग (N)</td><td>40</td></tr>
</table>

यह वर्गीकृत बारंबारता बंटन का एक उदाहरण है। जैसा ऊपर स्पष्ट किया गया है, यहां वर्ग अंतराल का साइज (लम्बाई) 10 है। उदाहरण के लिए, आइए कोई वर्ग अंतराल, मान लीजिए 60–69 लें।

वर्ग अंतराल की ऊपरी तथा निचली सीमाएं क्रमश: 69 तथा 60 हैं।

वर्ग अंतराल का साइज = 69–60+1 = 10

आप देख सकते हैं कि एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन में सभी वर्ग अंतरालों के साइज समान होते हैं।

कभी-कभी वर्ग अंतराल नीचे दिये गए ढंग से निरुपित किये जाते हैं :

0-9 के स्थान पर	0-10
10-19 के स्थान पर	10-20
20-29 के स्थान पर	20-30
30-39 के स्थान पर	30-40, इत्यादि

इस प्रकार की व्यवस्था में प्रत्येक वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा को सूचित करने वाला अंक उस वर्ग अंतराल में सम्मिलित नहीं है।

इसके अतिरिक्त, इस दशा में वर्ग अंतराल का साइज वर्ग अंतराल की ऊपरी तथा निचली सीमाओं के अंतर के बराबर होता है। उदाहरणार्थ वर्ग अंतराल का साइज = 40-30=10

क्रियाकलाप 4

- *अपने विद्यालय की कक्षा VII के विद्यार्थियों के भार मापिए। उनके भारों का एक उपयुक्त वर्गीकृत बारंबारता बंटन तैयार कीजिए।*

....

....

....

8.4 आंकड़ों का सचित्र चित्रण

आप जानते हैं कि चित्र प्राय: दृष्टि-लुभावन, समझने में अधिक आसान तथा प्रेक्षक के मस्तिष्क पर गहरी छाप छोड़ने वाले होते हैं। अत: संख्यात्मक आंकड़ों को चित्रीय। ग्रॉफिक रूप में प्रस्तुत करने के लिए भिन्न-भिन्न विधियां विकसित की गयी है। इस खण्ड में हम ऐसे चार निरुपणों अर्थात चित्रालेख, दंडालेख, आयतचित्र तथा पाई चार्ट पर चर्चा करेंगे।

8.4.1 चित्रालेख

संख्यात्मक आंकड़ों को निर्दिष्ट करने के लिए हम चित्र प्रतीकों का उपयोग कर सकते हैं। इन चित्रा लेखों का तात्कालिक दृष्टि-संघात होता है। आइए नीचे दिए गए संख्यात्मक आंकड़ों को एक चित्रालेख द्वारा प्रस्तुत करें।

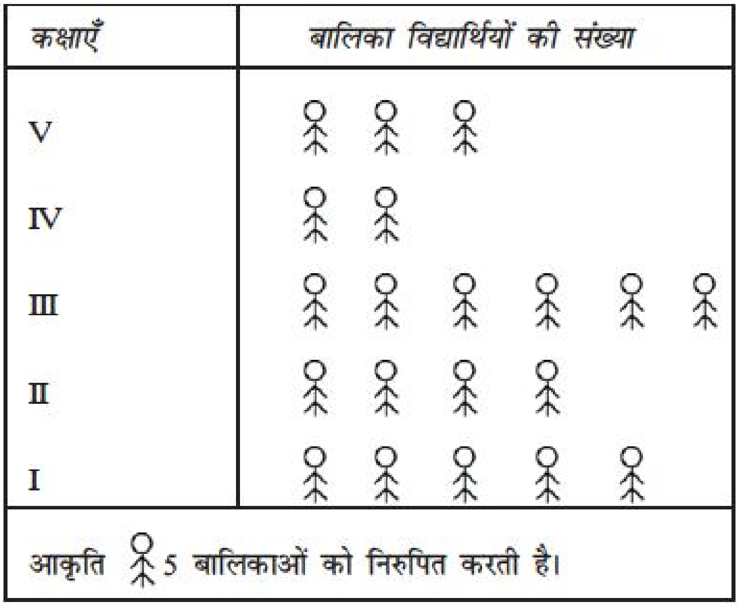
उदाहरण 7 : किसी विद्यालय की विभिन्न कक्षाओं में अध्ययनरत बालिकाओं की संख्या नीचे दी गयी है।

टिप्पणी

सारणी 8.3 विद्यालय में बालिकाओं की संख्या

कक्षा	I	II	III	IV	V
बालिकाओं की संख्या	25	20	30	10	15

उपर्युक्त आंकड़ों को नीचे चित्रालेख द्वारा प्रस्तुत किया गया है।

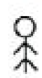
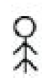


आकृति 8.1 विद्यालय में बालिका विद्यार्थियों की संख्या का चित्रा लेख

चित्रालेख बंटन के विषय में दृष्टि को प्रभावित करते हैं।

नोट : (i) चित्रालेख प्राय: मैगजीनों, समाचार पत्रों मे प्रयोग किये जाते हैं।

(ii) चित्रालेख बनाना अधिक समय लेता है।

चित्रालेख बनाना : कभी-कभी एक चित्रालेख में, एक प्रतीक एक अथवा अधिक वस्तुओं को निरुपित करने के लिए प्रयुक्त किया जाता है तथा उसका खींचना (बनाना) कठिन हो सकता है। ऐसी स्थितियों में सरल प्रतीकों का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि  5 विद्यार्थियों को निरुपित करता है, तो  4 विद्यार्थियों,  3 विद्यार्थियों,  दो विद्यार्थियों तथा  एक विद्यार्थी को निरुपित करता है।

इस प्रकार से निरुपण का कार्य सरलतर होगा।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 5

(a) समाचार पत्रों अथवा मैगजीनों से 2-3 चित्रालेखों को संग्रहित कीजिए तथा अपनी कक्षा में उन्हें प्रदर्शित कीजिए।

(b) अपने विद्यालय की विभिन्न कक्षाओं में किसी दिन अनुपस्थित रहने वाले छात्रों का चित्र खींचिए।

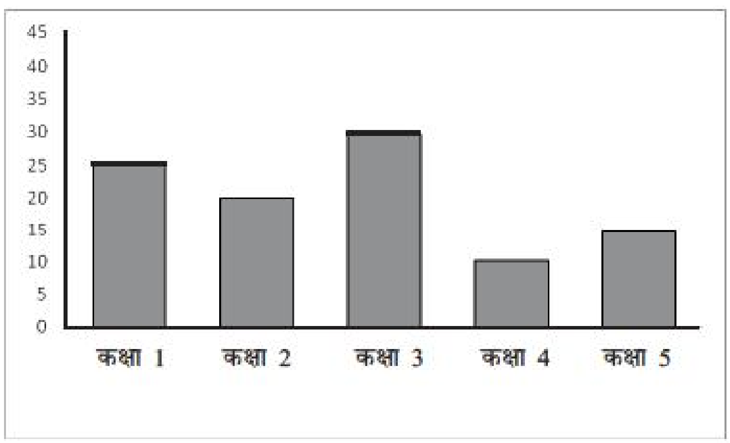
....

....

....

8.4.2 दंडालेख

कभी-कभी चित्रालेख खींचना कठिन तथा अधिक समय लेने वाला होता है। आइए, संख्यात्मक आंकड़ों को चाक्षुष निरुपण का कोई अन्य ढंग सोचें। उदाहरण-7 में आंकड़ों के लिए नीचे दिया गया दंडालेख प्रदर्शित किया जा सकता है।



आकृति 8.2 : विद्यालय में कक्षा-वार लड़कियों की संख्या

आइए, उपर्युक्त ग्रॉफ को ध्यान से देखें। आप निम्नलिखित प्रेक्षण कर सकते हैं :

- एक समान चौड़ाई वाले दंड उर्ध्वाधर खींचे गए हैं।
- साथ-साथ वाले दंड युग्मों के बीच के खाली स्थान एक समान चौड़ाई वाले हैं।
- प्रत्येक दंड की लम्बाई दी गयी संख्या को निरुपित करती है।

आंकड़ों को निरुपित करने की ऐसी आकृति को **दंडालेख** अथवा **दंडारेख** कहा जाता है।

क्या आप जानते हैं?

- अक्षों के बदलकर दंडों को क्षैतिज रूप में भी खींचा जा सकता है।
- सभी दंडों का एक समान रंग अथवा एक समान छायांकन होगा

किसी दंडा लेख को खींचने के चरण

चरण 1 : एक क्षैतिज तथा एक उर्ध्वाघर रेखा खींचिए।

चरण 2 : क्षैतिज रेखा पर अंक (स्कोर) रखिए जिनपर प्रत्येक मद को निरुपित करने वाले दंड खींचे जाने हैं।

चरण 3 : उर्ध्वाघर रेखा पर मदों की संख्या निरुपित करने वाले संख्यांक (एक उपयुक्त पैमाना लेकर) लिखिए।

चरण 4 : मदों को निरुपित करने के लिए समान चौड़ाई वाले दंडों का उपयोग कीजिए।

चरण 5 : समान मद को निरुपित करने वाले दंडों को एक समान ढंग से छायांकित कीजिए।

क्रियाकलाप 6

एक सप्ताह में आपके विद्यालय के अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या नीचे दी गयी है। इन आंकड़ों के लिए एक दंडालेख तैयार कीजिए।

दिन	*रविवार*	*सोमवार*	*मंगलवार*	*बुधवार*	*गुरुवार*	*शुक्रवार*	*शनिवार*
अनुपस्थितियों की संख्या	*25*	*7*	*16*	*11*	*9*	*18*	*20*

बहु दंड आरेख

कभी-कभी दो या अधिक प्रकार के आंकड़े उनमें परस्पर तुलना करने के लिए दिये गए होते हैं। आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें जिसमें एक विद्यार्थी का कक्षा VII में पढ़ाये जाने वाले भिन्न-भिन्न विषयों में अर्द्धवार्षिक तथा वार्षिक परीक्षाओं में प्रदर्शन दिया गया है। ग्रॉफ दोनों परीक्षाओं में विषयों में विद्यार्थी के प्रदर्शन के बदलाव को दिखाएगा।

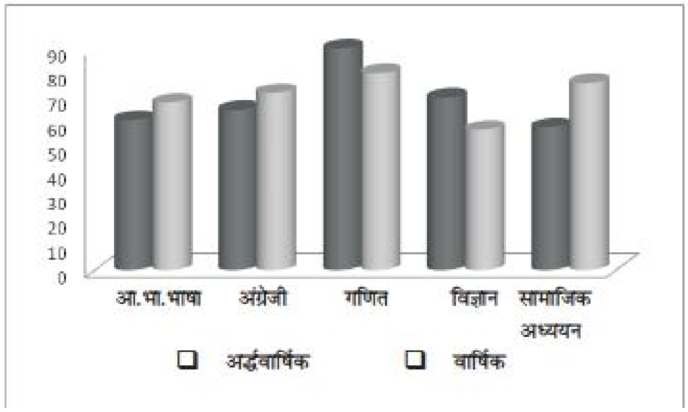
उदाहरण 8

सारणी 8.4 : विभिन्न विषयों में अंक

विषय / परीक्षा	*आ.भा. भाषा*	*अंग्रेजी*	*गणित*	*विज्ञान*	*सामाजिक अध्ययन*
अद्धवार्षिक	61	65	90	70	58
वार्षिक	68	72	80	57	76

टिप्पणी

आंकड़ों के दंडा लेख में प्रत्येक विषय के लिए दो दंड हैं। दोनों परीक्षाओं में अंतर दिखाने के लिए हम प्रत्येक विषय के अंतर्गत दो दंडों के लिए भिन्न रंग अथवा भिन्न छायांकन का प्रयोग करते हैं।



आकृति 8.7 : अर्द्धवार्षिक तथा वार्षिक परीक्षाओं में अंक

नोट : इस आॅलेख को बनाने के लिए आप ग्रॉफ पेपर का उपयोग भी कर सकते हैं।

8.4.3 आयत चित्र

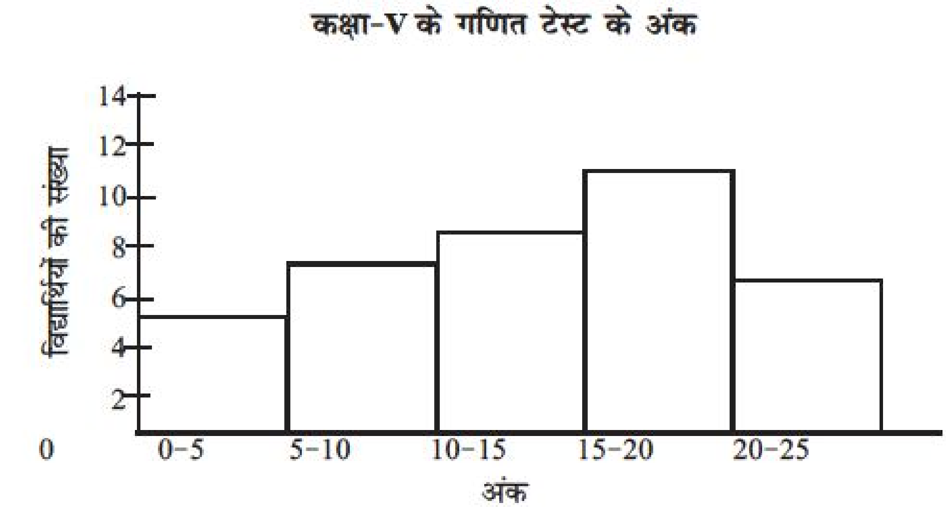
यदि आंकड़े एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन के रूप में हैं जहां वर्गों की बारंबारताएं निरंतरता के साथ दी गयी हैं तो दो क्रमवार दंडों के बीच में खाली स्थान रखने का कोई औचित्य नहीं हैं। अत: दंडों को लगातार खींचा जाता है। इस प्रकार के ग्रॉफ को आयत चित्र कहते हैं। आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 9 : कक्षा V के विद्यार्थियों के गणित में किसी इकाई परीक्षा के अंकों के बांरबारंता बंटन के उपयोग से एक आयतचित्र बनाया गया है।

सारणी 8.5 : कक्षा V के गणित टेस्ट के अंकों का विभाजन

अंकों के वर्ग अंतराल	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
विद्यार्थियों की संख्या	5	7	10	12	6

दिये गए आंकड़ों के लिए आयत चित्र नीचे दिया गया है



आकृति 8.4 : गणित टेस्ट के अंकों का आयत चित्र

नोट : आयत चित्र को ग्रॉफ पेपर पर भी बनाया जा सकता है।

8.4.4 पाई-चार्ट

हम अवर्गीकृत आंकड़ों को निरुपित करने के लिए भी पाई-चार्ट बना सकते हैं।

एक पाई-चार्ट में एक वृत्त आंकड़ों की सम्पूर्णाता को निरुपित करता है। आंकड़ों के प्रत्येक भाग को एक त्रिज्य-खंड द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। प्रत्येक त्रिज्य-खंड के लिए हमें केंद्रीय कोण ज्ञात करना होता है जो निम्नलिखित संबंध द्वारा परिकलित होता है : $\theta = \frac{f}{N} \times 360°$,

जहाँ f = भाग की बारंबारता तथा N = बारंबारताओं का योग

उदाहरण 10 : आइए नीचे दिए गए उदाहरण के लिए पाई-चार्ट बनायें।

सारणी 8.6 मिताली के परिवार का विभिन्न मदों पर मासिक व्यय प्रदर्शित करती है।

सारणी 8.6 (मासिक व्यय)

व्यय के मद	*व्यय (सौ रुपयों में)*
मकान किराया	21
शिक्षा	36
परिवहन	06
भोजन	42
मिश्रित	12
योग	120

टिप्पणी

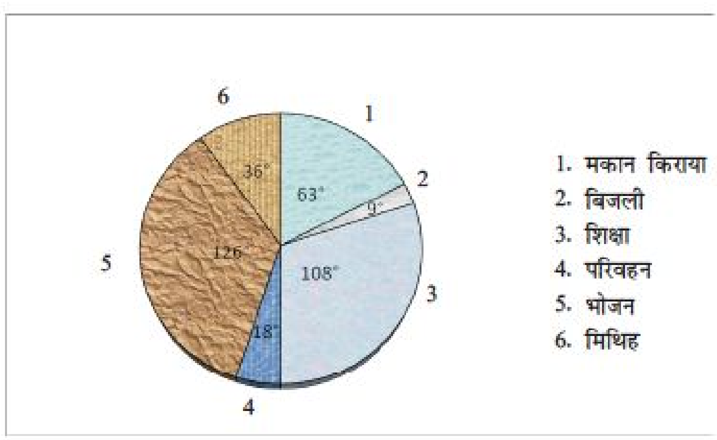
हमें दिये हुए ऑकड़ों को निरुपित करने के लिए पाई-चार्ट तैयार करना है। अत: हमें प्रत्येक मद का त्रिज्यखंड कोण परिकलित करना है। आइए, इस संबंध को प्रदर्शित करने वाली नीचे दी गयी सारणी की रचना करें।

सारणी 8.7 (मासिक व्यय)

व्यय के मद	*व्यय (सौ रुपयों में)*	*केंद्रीय कोण*
मकान किराया	21	$\frac{360}{120} \times 21 = 63°$
बिजली	03	$\frac{360}{120} \times 03 = 9°$
शिक्षा	36	$\frac{360}{120} \times 36 = 108°$
परिवहन	06	$\frac{360}{120} \times 06 = 18°$
भोजन	42	$\frac{360}{120} \times 42 = 126°$
मिश्रित	12	$\frac{360}{120} \times 12 = 36°$

उपर्युक्त आंकड़ों का पाई चार्ट नीचे दिया गया है।

मासिक व्यय प्रदर्शित करने वाला पाई चार्ट



आकृति 8.5 मासिक व्यय प्रदर्शित करने वाला पाई चार्ट

एक पाई चार्ट बनाने के लिए चरण :

चरण 1 : प्रत्येक त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण परिकलित कीजिए।

चरण 2 : उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए।

चरण 3 : केंद्रीय कोण प्रदर्शित करने वाली त्रिज्याएं या तो दक्षिणावर्त्त अथवा वामावर्त्त रूप में खींजिए।

चरण 4 : त्रिज्य खंडों को अलग-अलग रूप में छायांकित कीजिए (रंग भरिए)

आगे बढ़ने से पहले निम्नलिखित के लिए उत्तर देने का प्रयास कीजिए।

E1 पांच गांवों में पशुओं की कुल संख्या नीचे दी गयी है :

नरहरिपुर	पुरुनाकोट	पातला	सनामुण्डा	कान्ति मिली
80	100	60	120	50

10 पशुओं के लिए प्रतीक के उपयोग से इन पशुओं के लिए एक चित्रालेख तैयार कीजिए।

E2 एक सप्ताह में किसी दुकान दार द्वारा बेची गयी पुस्तकों की संख्या नीचे प्रदर्शित की गयी है :

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
पुस्तकों की संख्या	60	40	35	50	25	70	30

उपयुक्त पैमाना लेकर एक दंडालेख बनाइए।

E3 धेनकनाल कस्बे (नगर) में विभिन्न आयु-वर्गों में व्यक्तियों की संख्या नीचे दी गयी है:

आयु-वर्ग	1-15	15-30	30-45	45-60	60-75	75 से अधिक
व्यक्तियों की संख्या (हजार में)	24	30	42	36	18	12

उपर्युक्त जानकारी को निरुपित करने के लिए एक आयतचित्र बनाइए।

E4 नीचे दी गयी सारणी किसी विशेष दिन विभिन्न वाहनों के द्वारा विद्यालय पहुंचने वाले विद्यार्थियों की संख्या को प्रदर्शित करती है। इसके लिए एक पाई-चार्ट बनाइए।

वाहन के प्रकार	स्कूल बस	साइकिल	मोटर साइकिल/ स्कूटर	कार	अन्य
विद्यार्थियों की संख्या	160	80	60	20	40

8.4 आंकड़ों का विश्लेषण

हमने संग्रहित आंकड़ों का विभिन्न विधियों से अभिलेख करना तथा उन आंकड़ों को चित्रीय तथा ग्रॉफिक रूप में प्रदर्शित करना सीखा है। आंकड़ों के चाक्षुष निरुपण के अतिरिक्त क्या हम आंकड़ों का अन्य कोई विश्लेषण कर सकते हैं जिससे उनके बंटन की प्रवणता (प्रवृत्ति) समझ में आ सके?

यदि आप अब तक चर्चा किये गए किसी भी बारंबारता बंटन (अवर्गीकृत अथवा वर्गीकृत का गहन अध्ययन करें, तो बंटन के दो लक्षण आप देख सकेंगे :

- अंक अथवा प्रेक्षण आपको एक विशिष्ट मान, जो बंटन के मध्य के अधिक समीप हो, के इर्द-गिर्द घूमते दिखाई देंगे। आंकड़ों के बंटन के इस लक्षण को इसकी केन्द्रीय प्रवृत्ति कहा जाता है। केंद्रीय प्रवृत्ति की एक माप से तात्पर्य उस माध्यमिक मान से है जो पूरे आंकड़ों, जिनसे वह संबंधित है, का प्रतिनिधि है।

- आंकड़ों के बंटन की प्रवृत्ति के अध्ययन में केवल केंद्रीय प्रवृत्ति की माप का जानना ही पर्याप्त नहीं है। केंद्रीय मान के अतिरिक्त, हमें प्रेक्षणों के केंद्रीय मान के इर्द-गिर्द फैलाव का प्रवृत्ति को भी जानना है। नीचे प्रदर्शित दो बंटनों को देखिए :

  (a) 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

  (b) 5,9,10,13, 19, 17, 18

दोनों बंटनों में केंद्रीय मान 13 है। किन्तु, बंटन (a) में बंटन (b) की तुलना में अंक केंद्रीय मान 13 के अधिक समीप जमा हुए है। यह इस बात को दिखाने के लिए बहुत सरल उदाहरण है कि बंटन के पूर्ण विश्लेषण के लिए हमारे लिए यह जानना भी आवश्यक है कि अंकों का केंद्रीय मान के इर्द-गिर्द फैलाव अथवा विचरण कितना है। आंकड़ों के फैलाव अथवा विचरण की प्रवृत्ति के विचरण अथवा परिक्षेपण कहा जाता है। आंकड़ों के विचरण अथवा परिक्षेपण की माप से तात्पर्य यह निर्धारित करना है कि प्रेक्षण व्यक्तिगत रूप से केंद्रीय मान के कितने समीप फैले हुए हैं।

इस खंड में हम केंद्रीय प्रवृत्ति के कुछ मापकों तथा परिक्षेपण के विषय में चर्चा करेंगे।

8.5.1 केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक

केंद्रीय प्रवृत्ति एक सांख्यिकीय मापन है जो पूरे बंटन के लिए एक प्रतिनिधि मान (अंक) की पहचान कराता है। पद 'केंद्रीय प्रवृत्ति' का शाब्दिक अर्थ वह अंक है जहां सभी अंक केंद्रित होते हैं। केंद्रीय प्रवृत्ति का लक्ष्य उस एकाकी अंक का पता लगाना है जो कि पूरे समूह का सर्वाधिक प्रतिरूपी अथवा प्रतिनिधि है। इस खंड में हम तीन प्रमुख केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों के विषय में चर्चा करेंगे। ये हैं : **(i) गणितीय माध्य (ii) माध्यक तथा (iii) बहुलक**

आइए अब इन तीन मापकों को ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा करें।

8.5.1.1 गणितीय माध्य

केंद्रीय प्रवृत्ति का सबसे सामान्य मापक गणितीय माध्य अथवा केवल माध्य। इसे सामान्यतः औसत भी कहते हैं।

(a) **अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्य :** कुछ दिये गये प्रेक्षणों $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ के माध्य को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + xn}{n} = \frac{\Sigma x}{n}$$ (Σ संकलन के लिए प्रयुक्त होने वाला प्रतीक है।)

$$\text{माध्य} = \frac{\text{प्रेक्षणों (अंकों) का योग}}{\text{प्रेक्षणों (अंकों) की संख्या}}$$

उदाहरण 11 : किसी एक-दिवसीय क्रिकेट श्रृंखला में धोनी ने 33, 17, 60, 25 तथा 45 रन बनाए। उसका रनों का माध्य स्कोर परिकलित कीजिए।

कुल रन (रनों का योग) = 33+17+60+25+45=180

मैंचों की संख्या = 5

$$\text{अतः माध्य स्कोर} = \frac{\text{कुल रन}}{\text{मैचों की संख्या}} = \frac{180}{5} = 36$$

इस प्रकार प्रति मैच माध्य रन 36 हैं।

क्रियाकलाप 7

- *एक विशेष सप्ताह में अपने अध्ययन के घंटों का माध्य परिकलित कीजिए*
- *एक सप्ताह में अपने सोने के घंटों का माध्य ज्ञात कीजिए।*

....

....

....

(b) **अवर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्य**

आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 12 : किसी महीने में रणजीत की दैनिक मजदूरी नीचे दी गयी सारणी में प्रदर्शित की गयी है :

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	120	130	140	145	150
दिनों की संख्या	5	4	7	6	8

माध्य दैनिक मजदूरी परिकलित करने के लिए, हमें नीचे दी गयी सारणी तैयार करनी है।

सारणी 8.8 एक मास की दैनिक मजदूरी

दैनिक मजदूरी (रुपयों में) (x)	*दिनों की संख्या (बारंबारता = f)*	$f \times x$
120	5	600
130	4	520
140	7	980
145	6	870
150	8	1200
	$\sum f = 30$	$\sum fx = 4170$

अतः माध्य = $\dfrac{\text{मजदूरियों का योग}}{\text{दिनों की संख्या}} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{4170}{30} = 139$

रणजीत की माध्य दैनिक मजदूरी ₹ 139.00 है।

क्रियाकलाप 8 :

अंकों के निम्नलिखित बंटन का माध्य परिकलित कीजिए :

प्राप्त अंक	15	17	20	22	24	25
विद्यार्थियों की संख्या	3	5	9	4	7	2

(c) **वर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्य :** एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन की स्थिति में, प्रत्येक ग्रुप (वर्ग) को एक एकमात्र संख्या वर्ग अंतराल के मध्य बिंदु (वर्ग चिन्ह) से बदल दिया जाता है। यदि l_1 तथा l_2 वर्ग अंतराल की क्रमशः निचली तथा ऊपरी सीमाएं हों, तो वर्ग अंतराल का मध्य बिंदु है।

टिप्पणी

उदाहरण 13 : आइए, अब निम्नलिखित बंटन का माध्य परिकलित करें।

सारणी 8.9 वर्गीकृत बारंबारता बंटन

अंक (वर्ग अंतराल)	बारंबारता (f)	मध्य बिंदु (x)	$f \times x$
0-10	5	5	25
10-20	6	15	90
20-30	12	25	300
30-40	8	35	280
40-50	10	45	450
50-60	6	55	330
60-70	6	65	390
	$\sum f = 50$		$\sum fx = 1865$

अतः माध्य $= \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{1865}{50} = 37.3$

नोट : वर्गों को मध्य बिंदुओं से बदलने पर, वर्गीकृत बंटन अवर्गीकृत बंटन में परिवर्तित हो जाता है, तथा वर्गों के मध्य बिंदु अंकों का स्थान ले लेते हैं।

क्रियाकलाप 9 : निम्नलिखित बंटन का माध्य परिकलित कीजिए :

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	8	12	15	9	11	5

E5 प्रथम दस प्राकृत संख्याओं का माध्य क्या है?

क्या आप जानते हैं?

- एक सामान्य बंटन, जिसमें कोई असाधारण दूरतम अंक न हों, में माध्य सर्वाधिक विश्वसनीय केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक होता है।

टिप्पणी

- माध्य ग्रुप में प्रत्येक अंक के साइज से प्रभावित होता है। यदि एक अंक में c इकाइयों की वृद्धि (या कमी) हो जाय, तो माध्य में की वृद्धि (या कमी) हो जाती है।
- यदि एक समूह, जिसका माध्य $\bar{x}$ है के प्रत्येक अंक में एक अचर c जोड़ दिया जाए, तो परिणामी अंकों का मध्य $\bar{x}+c$ हो जाएगा। (आप एक छोटा बंटन लेकर माध्य के इस गुण को सत्यापित कर सकते हैं।) आप प्रमाणित कीजिए कि यदि प्रत्येक अंक को अचर c से गुणा किया जाए, तो माध्य के साथ क्या घटित होगा।

8.5.1.12 माध्यक

आंकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर प्राप्त मध्य मान को माध्यक कहा जाता है। इस प्रकार माध्यक से तात्पर्य उस मान से है जो आंकड़ों के मध्य में स्थित होता है ताकि आधे प्रेक्षण उसके ऊपर तथा आधे नीचे हों। दूसरे शब्दों में, माध्यक बंटन को दो बराबर आधों में विभक्त करता है।

(a) अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक

दिये गये आंकड़ों को उनके परिमाण के आधार पर आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के उपरांत मध्य प्रेक्षण के मान को आंकड़ों का माध्यक कहा जाता है।

एक अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक ज्ञात करने की विधि :

अंकों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए। मान लीजिए कि प्रेक्षणों की कुल संख्या n है।

स्थिति (1) जब n विषम है।

$$\text{माध्यक} = \frac{1}{2}(n+1) \text{ वें प्रेक्षण का मान}$$

स्थिति (2) जब n सम है, तो दो मध्य बिंदु प्राप्त होंगे।

$$\text{माध्यक} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2} \text{ वाँ प्रेक्षण} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वां प्रेक्षण}\right]$$

आइए, निम्नलिखित उदाहरणों का अध्ययन करें।

उदाहरण 14 : किसी विद्यालय में 10 शिक्षकों की आयु (वर्षों में) 37, 34, 52, 45, 50, 41, 31, 40, 36 तथा 55 हैं। उन की माध्यक आयु ज्ञात कीजिए।

आयुओं को आरोही क्रम में लगाने पर हमें प्राप्त होता है

31, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 50, 52, 55

यहां $n = 10$ जो सम है।

अतः बंटन के मध्य में अंक 40 तथा 41 हैं।

$\therefore$ माध्यक = 40 तथा 41 का मध्य

$$= \frac{1}{2}(40+41) = \frac{1}{2} \times 81 = 40.5$$

अतएव शिक्षकों की माध्यक आयु 40.5 वर्ष है।

उदाहरण 15 : किसी एक दिवसीय क्रिकेट मैच में भारतीय टीम द्वारा बनाये गए रन हैं : 95, 40, 2, 55, 10, 38, 33, 22, 0, 18, 8; माध्यक रन ज्ञान कीजिए।

रनों को अवरोही क्रम में लगाने पर हमें प्राप्त होता है :

95, 55, 40, 38, 33, 22, 18, 10, 8, 2, 0

यहां $n = 11$, जो विषम है।

अतः माध्यक रन $= \frac{1}{2}(11+1)$ वें प्रेक्षण का मान

= 6वें प्रेक्षण का मान

= 22

अतएव माध्यक रन 22 हैं।

(b) अवर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्यक

किसी अवर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्यम ज्ञात करने के चरण हैं :

चरण 1 : अंकों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

चरण 2 : संचयी बारंबारता ज्ञान कीजिए जो प्रारंभ से संबंधित अंक तक की बारंबारताओं का योग होता है।

चरण 3 : बारंबारताओं का योग N ज्ञात कीजिए।

यदि N विषम है, तो माध्यक = $\left(\frac{N}{2}\right)$ वें अंक का साइज

आइए, नीचे दिये गए उदाहरण को ध्यान पूर्वक देखें।

टिप्पणी

उदाहरण 16 : नीचे दिये गए बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए :

प्राप्तांक	17	20	15	12	18	25
विद्यार्थियों की संख्या (f)	5	8	6	7	10	3

हम संचयी बारंबारता सारणी बनाते हैं

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी बारंबारता
15	6	6
17	5	$6+5=11$
18	10	$11+10=21$*
20	8	$21+8=29$
22	7	$29+7=36$
25	3	$36+3=39$
	$N=\sum f=39$	

* 20वां स्थान

अत: माध्यक का स्थान वां अर्थात $\frac{39+1}{2}$ वां अथवा 20वां है। इसका अर्थ है कि मध्य-बिंदु बंटन के 20वें स्थान पर पड़ता है। इस उदाहरण में अंक 18 12 से 21 तक के सभी स्थानों को घेरे हुए है अर्थात वह अंक जो 12वें, 13वें, 14वें, ..., 21वें स्थानों में से प्रत्येक के लिए है, 18 है। अतएव अंकों का माध्यक = माध्यक के स्थान वाला अंक = 18

(c) वर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्यक

कक्षा VII के विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किये गए अंकों के नीचे दिये गए बंटन पर विचार कीजिए:

सारणी 8.11 वर्गीकृत आंकड़ों के लिए माध्यक

प्राप्तांकों के वर्ग अंतराल	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी बारंबारता
30-39	1	1
40-49	3	4
50-59	8	12
60-69	15	27
70-79	10	37
80-89	9	46
90-99	4	50
	N = 50	

किसी वर्गीकृत बारंबारता बंटन के लिए, माध्यक निम्नलिखित सूत्र के प्रयोग से परिकलित किया जाता है :

$$\text{माध्यक} = Lm + \frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} xi$$

जहां, Lm = उस वर्ग अंतराल की ठीक निचली सीमा जिसमें माध्यक स्थित होता है।

N = अंकों (प्रेक्षणों) का योग

F = Lm से नीचे वाली बारंबारताओं का योग

Fm = जिस वर्ग अंतराल में माध्यक स्थित होता है, उसकी बारंबारता

i = वर्ग अंतराल की लंबाई (का साइज)

उपर्युक्त उदाहरण में,

N = विद्यार्थियों की कुल संख्या = 50

अत: माध्यक 25वें तथा 26वें स्थानों के बीच स्थित है अर्थात वर्ग अंतराल 60-69 में है।

यहां, Lm = वर्ग अंतराल 60-69 की ठीक निचली सीमा = 59.5

f = 12, fm = 15 तथा i = 10

$$\therefore \text{ माध्यक} = 59.5 + \frac{\frac{50}{2} - 12}{15} \times 10$$

$$= 59.5 + 8.67 = 68.17$$

वर्गीकृत बंटन में माध्यक परिकलित करने के लिए चरण :

1. संचयी बारंबारता परिकलित कीजिए तथा उस वर्ग अंतराल का पता लगाइए जिसमें माध्यक स्थित है।
2. जिस वर्ग अंतराल में माध्यक स्थित है, उसकी ठीक (सही) निचली सीमा (Lm) निर्धारित कीजिए।
3. संचयी बारंबारताओं के परिकलन से, जिस वर्ग अंतराल में माध्यक स्थित है उसकी सही निचली सीमा से नीचे वाली बारंबारताओं का योग (F) ज्ञात कीजिए।
4. अंतर $\frac{N}{2} - F$ ज्ञात कीजिए, जिस वर्ग अंतराल में माध्यक स्थित है, उसके अंकों की बारंबारता से इस अंतर को भाग दीजिए तथा परिणाम को वर्ग अंतराल की लंबाई से गुणा कीजिए।
5. माध्यक प्राप्त करने के लिए चरण 4 के परिणाम को ठीक निचली सीमा Lm में जोड़िए।

आगे बढ़ने से पहले निम्नलिखित दो अवस्थाओं में माध्यक ज्ञात कीजिए :

E6 प्रथम 8 विषम प्राकृत संख्याओं का माध्यक ज्ञात कीजिए।

E7 निम्नलिखित आंकड़ों के लिए माध्यक भार ज्ञात कीजिए :

भार (किग्रा में)	40	42	45	46	48	50	52
विद्यार्थियों की संख्या	8	5	6	9	7	4	2

क्या आप जानते हैं?

- माध्यक वह अंक है जो प्रेक्षणों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में लगाने पर बंटन के ठीक बीच में स्थित होता है।
- माध्यक एक स्थान धारक प्रेक्षण है और इसी कारण से किसी दूरतम अंक से यह प्रभावित नहीं होता। यदि आप दूरतम अंकों में वृद्धि अथवा कमी करें, तो माध्यक नहीं बदलता।
- यदि बंटन में अत्यधिक छोटे और/अथवा बड़े अंक हों जिनसे माध्य पर प्रभाव पड़ता हो, उस स्थिति में माध्यक को प्राथमिकता दी जाती है।
- यदि केंद्रीय प्रवृत्ति के शीघ्र अनुमान की आवश्यकता हो, तो माध्यक का उपयोग किया जाता है।

8.5.1.3 बहुलक

माध्य तथा माध्यक के अतिरिक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का एक अन्य मापक भी है जिसे बहुलक कहा जाता है। आंकड़ों से संबंधित विभिन्न आवश्यकताओं के लिए केंद्रीय प्रवृत्ति के इस मापक का उपयोग किया जाता है। अब, नीचे दिये गए उदाहरण को देखिए।

उदाहरण 17 : जूतों के विभिन्न साइजों की मासिक मांग का पता करने के लिए एक दुकानदार ने अपनी बिक्री के विवरण रखे। एक मास का विवरण नीचे दिया गया है।

साइज	5	6	7	8	9	10	योग
बेचे गए जूतों के जोड़े	20	51	70	35	10	6	192

$$\text{बेचे गए जूतों का माध्य} = \frac{\text{कुल बेचे गये जूते}}{\text{विभिन्न साइजों की संख्या}} = \frac{192}{6} = 32$$

क्या दुकानदार प्रत्येक साइज वाले 32 जूतों के जोड़े प्राप्त करे? यदि वह ऐसा करता है, तो क्या वह ग्राहकों के सबसे बड़े ग्रुप की मांग को पूरा कर सकेगा?

विवरण देखने पर दुकानदार 6, 7 तथा 8 साइज वाले जूते अधिक लेने का निर्णय करता है।

जूतों का साइज, जिसके सर्वाधिक ग्राहक हैं, 7 है।

ध्यान दीजिए कि दुकानदार जूतों के उस साइज को देख रहा है जिस की बिक्री सबसे अधिक है। यह आंकड़ों के लिए एक अन्य प्रतिनिधि मान है। इस प्रतिनिधि मान को आंकड़ों का बहुलक कहा जाता है। इस प्रकार अंकों के एक समूह का बहुलक कह अंक है जो सबसे अधिक बार आता है।

बहुलक : बहुलक वह अंक (स्कोर) है जो बंटन में सबसे अधिक बार आता है।

आइए, कुछ और उदाहरणों पर चर्चा करें।

उदाहरण 18 : भारत के क्रिकेट के खिलाड़ियों की आयु नीचे दी गयी है। उनकी बहुलक आयु ज्ञात कीजिए।

29, 38, 19, 24, 34, 29, 24, 38, 23, 28, 24, 25, 21, 26, 24

एक समान आयुओं को साथ-साथ रखते हुए आयुओं को व्यवस्थित करने पर हम प्राप्त करते हैं।

19, 21, 23, 24, 24, 24, 25, 26, 28, 29, 29, 34, 38, 38

इन आंकड़ों का बहुलक 24 है क्योंकि अन्य प्रेक्षणों की तुलना में अधिक बार आता है।

उदाहरण 19 : निम्नलिखित आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए :

प्राप्त किये गए अंक	10	12	13	15	18	19	20
विद्यार्थियों की संख्या	3	4	5	2	5	2	1

अंकों के बहुलक अर्थात् सर्वाधिक बारंबारता वाले अंक 13 तथा 18 हैं।

नोट : एक बंटन में बहु बहुलक अर्थात एक से अधिक बहुलक हो सकते हैं। यदि प्रेक्षणों की संख्या बड़ी है, तो हम एक अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी मिलान-चिन्हों के प्रयोग से बना सकते हैं। उसके बाद हम बंटन का माध्य, माध्यक तथा बहुलक ज्ञात कर सकते हैं।

क्या आप जानते हैं?

- एक पूर्ण सममित बंटन में बहुलक का लगभग मान परिकलित करने के लिए सूत्र है :

  बहुलक = 3 × माध्यक – 2 × माध्य

- जब हम यह जानना चाहते हैं कि सर्वाधिक प्रतिरूपी स्थिति कौन सी है, तो हम बहुलक का उपयोग करते हैं।

टिप्पणी

- बहुलक केंद्रीय प्रवृत्ति का सबसे अधिक अस्थायी मापक है।
- बहुलक बंटन का एक अंक (प्रेक्षण) होता है, बारंबारता नहीं।

8.5.2 विचरण के मापक

विचरण अथवा परिक्षेपण के मापक दो प्रकार के होते हैं–दूरी मापक तथा औसत विचलन के मापक।

दूरी मापक : दूरी मापक आंकड़ों में विचरण का चुनिंदा मापों के बीच की दूरी के पदों में वर्णन करते हैं। यहां हम दो ऐसे मापक–परिसर तथा अंतर्चतुर्थक परिसर पर चर्चा करेंगे।

परिसर : परिकलन तथा समझ दोनों ही विचारों से परिसर विचरण का सरलतम मापक है। यह आंकड़ों में सबसे बड़े तथा सबसे छोटे प्रेक्षणों का अंतर होता है।

उदाहरण के लिए अंकों 2, 5, 6, 4, 12, 10, 9 तथा 8 का परिसर 12-2=10 है।

इसी प्रकार–2,0,3,7 तथा 9 का परिसर 9–(-2)=11 है।

इस प्रकार के परिसर को **'अनन्य परिसर'** कहा जाता है। किंतु जब हम अधिकतम अंक की ठीक ऊपरी सीमा तथा न्यूनतम अंक की ठीक निचली सीमा के बीच के अंतर से परिसर निर्धारित करते हैं तो उसे **'सम्मिलित परिसर'** कहते हैं।

ऊपर के उदाहरण में अधिकतम अंक 12 की ठीक ऊपरी सीमा 12.5 है तथा न्यूनतम अंक 2 की ठीक निचली सीमा 1.5 है। (सामाजिक विज्ञान में प्रत्येक प्रेक्षण स्थिर तथा नियत नहीं है। अपितु इसे अंक के पहले तथा बाद में 0.5 के एक अंतराल पर फैला हुआ माना गया है। अतः अंक 12 अंतराल 11.5-12.5 में कोई मान है; अंतराल के अन्त्य बिंदु 12 की ठीक ऊपरी तथा निचले मान निर्धारित करते हैं।) अतएव बंटन का सम्मिलित परिसर 12.5-1.5=11 है जबकि इसका अनन्य परिसर 10 है।

E8 -1, 2, 5, -5, 4, 6 तथा 7 का सम्मिलित परिसर परिकलित कीजिए।

E9 किसी बंटन के सम्मिलित तथा अनन्य परिसरों का अंतर क्या है?

यद्यपि परिसर, चाहे अनन्य हो अथवा सम्मिलित, परिकलित करने में अधिक सरल तथा विचरण का सरलतम मापक है, किंतु यह आंकड़ों के फैलाव तथा बिखराव को प्रतिबिम्बित न ही करता। उदाहरण के लिए यदि 100 अंक 1 तथा 10 के बीच में एक समान रूप से फैले हो, तो सम्मिलित परिसर 10 होगा। किंतु यदि एक अंक 1 तथा एक अंक 10 हो, तथा इनके बीच अंक 5 98 बार दोहराया गया हो, तो भी अंकों की कुल संख्या 100 तथा सम्मिलित परिसर 10 ही रहेगा। इससे यह प्रदर्शित होता है कि परिसर विचरण का एक शीघ्र अनुमान हो सकता है लेकिन इसका सही मापक नहीं।

अंतर्चतुर्थक परिसर : अंतर्चतुर्थक परिसर अथवा विशिष्टतया अर्द्ध-अंतर्चतुर्थक परिसर बंटन के विचरण का एक अन्य दूरी मापक है। इससे पहले हमने माध्यक को एक ऐसे अंक के रूप में परिभाषित किया था जो बंटन को ठीक दो आधों में विभक्त करता है। इसी प्रकार से चतुर्थकों के उपयोग से किसी बंटन को चार बराबर भागों में विभक्त किया जा सकता है। परिभाषा से, प्रथम चतुर्थक (Q_1) वह अंक है जो बंटन के नीचे वाले 25% भाग को शेष भाग से अलग करता है। द्वितीय चतुर्थक (Q_2) वह अंक है, जो बंटन के ठीक दो चतुर्थकों अथवा 50% को शेष भाग से अलग करता है। ध्यान दीजिए कि द्वितीयचतुर्थक तथा माध्यक एक समान हैं। अंत में तृतीय चतुर्थक (Q_3) वह अंक है जो बंटन के निचले तीन-चौथाई भाग को ऊपरी चौथाई भाग से अलग करता है।

अंतर्चतुर्थक परिसर को पहले तथा तीसरे चतुर्थकों के बीच की दूरी के रूप में परिभाषित किया जाता है।

अंतर्चतुर्थक परिसर = Q_3–Q_1

जब विचरण का वर्णन करने में अंतर्चतुर्थक परिसर का प्रयोग किया जाता है, इसे सामान्यत: अर्द्ध-अंतर्चतुर्थक परिसर में बदल दिया जाता है। यह अंतर्चतुर्थक का मात्र आधा होता है।

अर्द्ध-अंतर्चतुर्थक परिसर $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

उदाहरण 20 : निम्नलिखित आंकड़ों के लिए अर्द्ध-अंतर्चतुर्थक परिसर ज्ञात कीजिए : 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 15

बंटन में अंकों की कुल संख्या 8 है। इसका 25% 2 है तो 75% 6 है। इसका अर्थ है कि Q_1 एक ऐसा बिंदु है जिससे नीचे पहले दो अंक अर्थात 3 और 4 स्थित होंगे। ऐसा एक बिंदु 4 तथा 6 के बीच की दूरी का मध्य बिंदु अर्थात 5 है। अतएव Q_1=5 1 इसी प्रकार Q_3 जिसके नीचे 6 अंक स्थित होंगे। 12 तथा 14 का मध्य बिंदु 13 है।

अतएव, अर्द्ध-अंतर्चर्तुथक परिसर $\dfrac{Q_3 - Q_1}{2} = \dfrac{13-5}{2} = 4$

क्योंकि अर्द्ध-अंतर्चतुर्थक परिसर बंटन के मध्य 50% भाग पर केंद्रीभूत होता है, इसके चरम (दूरतम) अंकों द्वारा प्रभावित होने की संभावना कम होती है किंतु यह व्यक्तिगत अंकों के बीच की दूरी का उपयोग नहीं करता, अंकों के विषय में पूरी जानकारी नहीं देता कि वे कितने फैले हैं अथवा गुच्छा बनाए हैं। इसलिए, परिसर की तरह, अर्द्ध-अंतर्चतुर्थक परिसर को विचरण का एक अपरिष्कृत मापक ही समझा जाता है।

औसत विचलन के मापक : किसी अंक का विचलन माध्य से उसकी दूरी होता है। जब ऐसे विचलन के अंकों का औसत लिया जाता है, तो विचरण का मापक अधिक सही तथा विश्वसनीय हो जाता है। यहां हम औसत विचलन के अंकों पर आधारित दो ऐसे ही मापकों–औसत विचलन तथा मानक विचलन पर चर्चा करेंगे।

जब अंक माध्य के अधिक समीप होते हैं, अर्थात जब बंटन सघन होता है, तो औसत विचलन का मापक छोटा होगा तथा इस का विलोम भी सत्य है। इससे हमें बंटन की प्रवृत्ति को समझने में सहायता मिलती है। उदाहरणार्थ, किसी कक्षा परीक्षा में, गणित परीक्षण में अंकों का माध्य 65 था तथा मानक विचलन 10 था, जबकि भाषा परीक्षण में अंकों का माध्य 60 था तथा मान विचलन 5 था। हम पाते हैं कि अधिकांश विद्यार्थियों ने भाषा में 60 के अधिक समीप अंक प्राप्त किए। किंतु भाषा में प्राप्त अंकों की तुलना में गणित में अंकों का फैलाव अधिक है। (गणित में कम अंक लेने वाले कुछ विद्यार्थी ऐसे भी हो सकते हैं जिनके अंक भाषा में आये न्यूनतम अंकों से भी कम हों। औसत विचलनों के मापकों के बिना हम अकेले केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों से कोई तर्क संगत निष्कर्ष नहीं निकाल सकते।

औसत विचलन : विचलन अंक (x) = अंक – माध्य = $X - \overline{X}$

यदि किसी बंटन में माध्य 50 है, तो अंक 55 का विचलन होगा

$$X - \overline{X} = 55 - 50 = 5$$

तथा अंक 45 का विचलन 45–50 = – 5 होगा।

ध्यान से देखिए किसी विचलन के अंक के दो भाग हैं : चिन्ह (+ अथवा –) तथा संख्या। चिन्ह हमें बताता है कि अंक माध्य के ऊपर(+) है अथवा इसके नीचे (–) है। संख्या हमें अंक की माध्य से वास्तविक दूरी बनाती है।

औसत अथवा माध्य विचलन बंटन में सभी अंकों का उसके अंकों के माध्य से विचलनों का माध्य होता है। माध्य विचलन के परिकलन में, चिन्हों पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता तथा सभी धनात्मक तथा ऋणात्मक विचलनों को धनात्मक लिया जाता है।

आइए हम पांच अंकों 5, 8, 11, 12, 14, जिनका माध्य 10 है, का औसत विचलन परिकलित करें।

सारणी 8.12 अवर्गीकृत आंकड़ों का विचलन

अंक (X)	*विचलन* ($X - \overline{X}$)	$\lvert X - \overline{X} \rvert$
5	5-10= -5	5
8	8-10= -2	2
11	11-10=1	1
12	12-10=2	2
14	14-10=4	4
$\sum \lvert X - \overline{X} \rvert = 14$		

औसत विचलन (औ.वि.) = $\frac{\sum|X-\overline{X}|}{N}=\frac{14}{5}=2.8$

ध्यान दीजिए कि विचलन अंकों का योगफल 0 है। क्यों?

वर्गीकृत आंकड़ों के लिए औसत विचलन

नीचे प्रदर्शित किये गए वर्गीकृत बारंबारता बंटन के लिए औसत विचलन के परिकलन की प्रक्रिया का ध्यानपूर्वक अवलोकन कीजिए :

सारणी 8.13 वर्गीकृत आंकड़ों का औसत विचलन

वर्ग अंतराल	f	*वर्ग अंतराल का मध्य बिंदु* (x)	$\lvert X-\overline{X}\rvert$	$fx\lvert x-\overline{x}\rvert$
30-34	3	32	10.38	31.14
35-39	9	37	5.38	48.42
40-44	15	42	0.38	5.70
45-49	8	47	4.62	36.96
50-54	5	52	9.62	48.10

यहां N = 40, माध्य $(\overline{X})=42.38$ तथा $\sum fx|X-\overline{X}|=170.32$

वर्गीकृत बारंबारता बंटन का औसत विचलन (औ.वि.) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके परिकलित किया जाता है :

औ. वि. $=\frac{\sum fx|x-\overline{x}|}{N}$

उपर्युक्त उदाहरण में, औ.वि. $=\frac{\sum fx|x-\overline{x}|}{N}$

$$=\frac{170.32}{40}$$

$$=4.26$$

मानक विचलन : व्यापक रूप से प्रयुक्त होने वाला विचरण का मापक मानक विचलन है।

टिप्पणी

परिकलन की दृष्टि से मानक विचलन को **मूल-माध्य-वर्ग विचलन** कहा जाता है।

इससे हम मानक विचलन (मा.वि.) के संगणन के चरण लिख सकते है :

1. बंटन का माध्य परिकलित कीजिए जिसके लिए आपको मा.वि. ज्ञात करना है।
2. माध्य से अंकों के विचलन निर्धारित कीजिए।
3. प्रत्येक विचलन का वर्ग कीजिए। विचलन घनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है कि विचलन का वर्ग सदा घनात्मक होता है।
4. वर्ग विचलनों का माध्य ज्ञात कीजिए। इस वर्ग विचलनों के माध्य को **'प्रसरण'** कहा जाता है जिसका उच्च सांख्यिकी में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है।
5. प्रसरण का घनात्मक वर्गमूल ज्ञात कीजिए तथा यहीं परिणाम **मानक विचलन** है।

आइए अंकों के निम्नलिखित समूह का मा.वि. जिसे अक्षर 'σ' (सिगमा) अथवा 's' द्वारा व्यक्त किया जाता है, ज्ञात करें :

अंक : 5, 6, 8, 10, 11, 14 जिनका माध्य 9 है।

सारणी 8.14 अवर्गीकृत आंकड़ों का मानक विचलन

अंक (x)	विचलन $(x = x - \bar{x})$	वर्ग विचलन (x^2)
5	-4	16
6	-3	9
8	-1	1
10	1	1
11	2	4
14	5	25

वर्ग विचलनों का योग = $\sum x^2 = 16 + 9 + 1 + 1 + 4 + 25 = 56$

प्रसरण = वर्ग विचलनों का माध्य $= \frac{\sum x^2}{N} = \frac{56}{6} = 9.33$

मानक विचलन (मा.वि.) $= \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{9.33} = 3.05$

वर्गीकृत आंकड़ों के लिए मानक विचलन

आइए सारणी 8.13 के वर्गीकृत आंकड़े ले तथा मानक विचलन परिकलित करें।

सारणी 8.15 वर्गीकृत आंकड़ों का मानक विचलन

वर्ग अंतराल	f	*व.अ. का मध्य बिंदु* (x)	*विचलन* $x = x - \bar{x}$	fx	fx^2
30-34	3	32	-10.38	-31.14	323.2332
35-39	9	37	-5.38	-48.42	260.4996
40-44	15	42	-0.38	-5.70	2.166
45-49	8	47	4.62	36.96	170.7552
50-54	5	52	9.62	48.10	462.722
$\sum f$ =N=40			$\sum fx^2$ =1219.3760		

वर्गीकृत बारंबारता बंटन का मानक विचलन निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके परिकलित किया जाता है :

$$\text{मा.वि.} = \frac{\sum fx^2}{N}$$

जहां x माध्य से वर्ग अंतराल के मध्य बिंदु का विचलन है, f संबंधित वर्ग अंतराल में अंक की बारंबारता है तथा n अंकों की कुल संख्या है।

उपर्युक्त सारणी से हम प्राप्त करते हैं

$$\text{मा.वि.} = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{1219.3760}{40}} = \sqrt{30.4844} = 5.52$$

विचरण के मापों के उपयोग

- जब हम उन आंकड़ों, जिनकी संख्या बहुत कम है तथा कोई दूरतम अंक नहीं है, के फैलाव का शीघ्र आकलन चाहते हैं, तो परिसर का उपयोग करते हैं।
- जब एक बंटन में कुछ दूरतम अंक होते हैं तथा माध्यक केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक होता है, तो अर्द्ध-अंतर्चतुर्थक परिसर को प्राथमिकता दी जाती है।

टिप्पणी

- जब अंक बहुत अधिक बिखरे हों जिनसे अनावश्यक रूप में मानक विचलन प्रभावित होगा, उस स्थिति में आंकड़ों के फैलाव के तर्क संगत अनुमान के लिए हम औसत विचलन का उपयोग करते हैं।
- विचरण के सभी मापकों में, मानक विचलन सर्वाधिक स्थायी तथा सही है। इसका प्रयास कीजिए।

E10 निम्नलिखित अंकों का मानक विचलन परिकलित कीजिए :

11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

8.6 सारांश

- कुछ आंकड़े सीधे प्राथमिक स्रोतों से संग्रहित किए जा सकते हैं जबकि कुछ गौण स्रोतों जैसे अभिलेखों, जरनलों, जनगणना, आदि से संग्रहित किए जाते हैं।
- आंकड़ों को अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत बारंबारता बंटनों के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है।
- सरलता पूर्वक समझने तथा विश्लेषण के लिए आंकड़ों को चित्रों तथा आलेखों के द्वारा निरुपित किया जा सकता है। चित्रालेख, दंडालेख, आयतचित्र तथा पाई चार्ट सरल आलेखी रूप हैं।
- केंद्रीय प्रवृत्ति के तीन मापक गणितीय माध्य, माध्यक तथा बहुलक हैं जो आंकड़ों के मूल सांख्यिकीय विवेचन के लिए प्रयुक्त किये जाते हैं।
- विचरण के मापकों के रूप में परिसर तथा अर्द्ध-अंतर्चतुर्थक परिसर दूरियों के मापक हैं जबकि मध्य विचलन तथा मानक विचलन औसत विचलनों के मापक हैं।

8.7 आपकी प्रगति की जांच के लिए उत्तर

E1 : गांवों के नाम Y-अक्ष तथा पशुओं की संख्या X-अक्ष पर लेकर चित्रालेख खींचिए।

E2 : पैमान 1 सेमी.=10 इकाई लेकर एक दंडालेख खींचिए। आप क्षैतिज अथवा उर्ध्वाघर दंड खींच सकते हैं।

E3 : आयु समूहों के लिए वर्ग अंतराल X-अक्ष तथा व्यक्तियों की संख्या Y-अक्ष पर लेकर आयतचित्र तैयार कीजिए।

E4 : अर्द्धव्यास 3 या 4 सेमी के वृत्त को खींच कर पाई चार्ट तैयार कीजिए। यहां प्रत्येक वाहन के लिए केंद्रीय कोण $\theta = \frac{360^\circ}{360^\circ} \times$ (विद्यार्थियों की संख्या)

E5 : माध्य = 5.5

E6 : माध्यक = 8

E7 : माध्यक भार = 45 किग्रा

E8 : 13

E9 : 1

E10 : 4

8.8 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

रा.शै.अनु.प्र. परिषद की कक्षा VI, VII, VIII के लिए पाठ्य पुस्तकें उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित सिखाना, Vol.I, एक इ.गा.रा.मु.वि. प्रकाशन

8.9 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1. नीचे प्रदर्शित किये गए विषयों में लिली द्वारा प्राप्तांकों के आंकड़ों का (i) चित्रा लेख (ii) आयत चित्र बनाइए :

विषय	आ.भा.मा.	अंग्रेजी	गणित	विज्ञान	सामजिक अध्ययन
प्राप्तांक	60	55	80	55	50

2. नीचे दिये गए आंकड़ों का (i) माध्य (ii) माध्यक तथा (iii) बहुलक ज्ञात कीजिए :

   16, 24, 14, 10, 20, 14, 15, 21, 15, 12, 13, 15, 16, 19, 17

3. निम्नलिखित बंटन के माध्य, माध्यक तथा बहुलक ज्ञात कीजिए :

अंक	5	6	7	8	9	10	11	12
बारंबारता	8	10	15	20	16	12	9	10

4. नीचे दिये गए वर्गीकृत आंकड़ों का मानक विचलन परिकलित कीजिए :

वर्ग अंतराल	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
अंक	6	9	15	25	13	7	5

टिप्पणी

इकाई-9 सामान्यीकृत अंकगणित के रूप में बीजगणित

संरचना

टिप्पणी

9.0 प्रस्तावना

आप गणित की एक शाखा 'अंकगणित' से भली भांति परिचित हैं। यह मूर्त संख्यओं जैसे 1, 2, 25, 37, 456,.... तथा संख्याओं पर विभिन्न संक्रियाओं जैसे योग, व्यवकलन, गुणा, भाग से संबंध रखती है। किंतु यदि हम संख्याओं के स्थान पर प्रतीकों, जैसे परिमाण बताने के लिए अक्षरों को प्रयोग करें तथा इन अक्षरों के साथ विभिन्न अंकगणितीय संक्रियाओं का पालन करें जैसा हमने संख्याओं के साथ किया था तो हम अंकगणित का व्यापीकरण कर रहे होते हैं तथा इसे बीजगणित नाम देते हैं।

इस प्रकार 'बीजगणित' गणित की एक शाखा है जिसमें संख्याओं के स्थान पर अक्षरों के प्रयोग द्वारा अंकगणित के सिद्धांतों का व्यापीकरण किया जाता है। जब हम बिना कोई संख्यात्मक मान लगाए किसी परिमाण अथवा मात्रा को व्यक्त करने तथा अंकगणित के अनुसार संक्रियाओं द्वारा समस्याओं को हल करने का प्रयास करते हैं, तो बीजगणित बहुत मनोरंजक तथा लाभप्रद होता है।

बीजगणित का आरंभ

शब्द 'Algebra' (बीज गणित) अरेबिक शब्द 'al–jabar' (एल-जबर) से लिया गया है, जैसा गणित की शोध-पुस्तक, जिसका शीर्षक ''एल किताब एल-मुख्ता अर फी हिसाब एल-गबर' (समापन तथा सन्तोलन द्वारा परिकलन पर संक्षिप्त पुस्तक) है तथा जिसे बगदाद के पारसी गणितज्ञ मुहम्मद इब्न मुसा अल ख्वारिजमी ने 820 A.D. में लिखा, में प्रयुक्त गया है, इसका अर्थ पुनर्मिलन है।

तृतीय शताब्दी A.D. में एलेक्जेन्ड्रिया में रहने वाले प्रसिद्ध ग्रीम गणितज्ञ डियोफैन्टस को ''अरिथमैटिका'' शीर्षक वाले प्रारंभिक कार्य के लिए ''बीजगणित का जनक'' माना जाता है।

इस इकाई को पूरा करने में आपको लगभग 7 सात अध्ययन घंटों की आवश्यकता होगी।

9.1 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि

- बीजगणितीय पदों, व्यंजकों की व्याख्या कर सकें तथा बीजीय व्यंजकों को विभिन्न श्रेणियों में रख सकें।
- चर तथा अचर, सजातीय तथा विजातीय पदों में अंतर बता सकें।
- बीजगणित व्यंजकों पर विभिन्न संक्रियाएं कर सकें।
- एक चर वाले रैखिक बीजगणितीय समीकरणों को हल कर सकें।
- गणितीय समस्याओं को हल करने में बीजीय विधियों का अनुप्रयोग कर सकें।

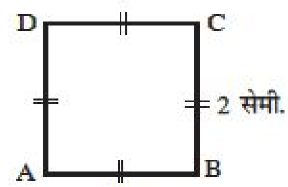
9.2 संख्याओं के लिए प्रतीक प्रयुक्त करना

बीजगणित की मुख्य विशेषता अंकगणित की विशेष स्थिति के अतिरिक्त सामान्य परिस्थिति में संख्याओं, मात्राओं अथवा गणितीय संबंधों को निरुपित करने में प्रतीकों का प्रयोग करना है। अक्षरों के प्रयोग से हम नियमों तथा सूत्रों को सामान्य ढंग में लिख सकेंगे। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

उदाहरण 1 : आयशा के पास 3 कलम हैं तथा उसके भाई अरविन के पास 2 कलम हैं। इसलिए उन दोनों के पास 3+2=5 कलम हैं।

इस उदाहरण में, मात्राओं को निरुपित करने तथा प्रक्रिया को परिकलित करने में संख्याओं को सम्मिलित किया गया है। आइए हम यह मान कर चलें कि आयशा के पास कलमों की संख्या x तथा अरविन के पास कलमों की संख्या y हैं। क्या हम ज्ञात कर सकते हैं कि उन दोनों के पास कुल कितने कलम हैं हम कह सकते हैं कि उनके पास कलमों की संख्या $(x+y)$ है। यहां x तथा y दो सुनिश्चित संख्याओं को निरुपित करते हैं।

उदाहरण 2 : (a) आकृति 9.1 एक वर्ग है जिसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 2 सेमी. है।



आकृति 9.1

इसका परिमाप $= AB + BC + CD + DA$

$= (2+2+2+2)$ सेमी.

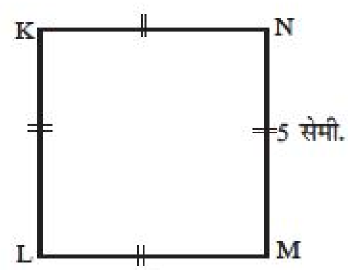
$= 8$ सेमी.

(b) आकृति 9.2 में वर्ग का परिमाप ज्ञात कीजिए।

KLMN का परिमाप $= KL + LM + MN + KN$

$= (5+5+5+5)$ सेमी.

$= 20$ सेमी.



आकृति 9.2

इस प्रकार हम दी हुई भुजा की लंबाई वाले किसी वर्ग का परिमाप ज्ञात कर सकते हैं।

ऊपर के उदाहरणों से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक वर्ग का परिमाप उसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई का 4 गुना होता है।

वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा की लम्बाई

यदि किसी वर्ग की भुजा की लम्बाई 'a' हो, तो उसके परिमाप 'p' को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\boxed{p = 4a}$$

टिप्पणी

यहां 'a' एक संख्या को निरुपित करता है जो किसी विशिष्ट वर्ग की एक भुजा की लम्बाई को निर्दिष्ट करती है तथा हम a के भिन्न मानों के लिए किसी भी वर्ग के परिमाप को ज्ञात कर सकते हैं।

इस प्रकार संख्याओं के निरुपण के रूप में प्रतीकों की सहायता से किसी संख्या संबंध का व्यापीकरण किया जा सकता है। अक्षर a, b, c,..... x, y, z संख्याओं जो अज्ञात मात्राएं हैं, को निरुपित करने के लिए प्रयुक्त किया जाता है। इसके परिणामस्वरूप विभिन्न शाब्दिक समस्याएं प्रतीकात्मक कथनों के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं। क्योंकि अक्षर संख्याओं को निरुपित करते हैं, वे चारों अंकगणित की संक्रियाओं के नियमों तथा गुणों का पालन करते हैं।

9.3 बीजगणितीय पद तथा व्यंजक

9.3.1 बीजगणितीय व्यंजक

अंकगणित में हम नीचे दिये गए जैसे व्यंजकों से मिले थे :

$(3 \times 8) + 2$; $(10 - 5) + (3 \times 20) - 7$: आदि

इन उदाहरणों में हम देख सकते हैं :

(i) व्यंजक संख्याओं से बने हैं।

(ii) सभी चारों मूल संक्रियाएं–योग, व्यवकलन, गुणा, भाग अथवा इनमें से कुछ एक व्यंजक में प्रयोग किये जाते हैं।

हम चरों के उपयोग से भी व्यंजक बना सकते हैं। आइए नीचे दिये गए उदाहरणों पर चर्चा करें :

उदाहरण-3 : बबलू कक्षा VI में है। उसकी कक्षा में 'm' बालिका विद्यार्थी हैं। बालकों की संख्या बालिकाओं की संख्या से 7 कम है। उसकी कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या परिकलित कीजिए।

बालिकाओं की संख्या $= m$

बालकों की संख्या $= m - 7$

विद्यार्थियों की कुल संख्या $= m + (m - 7) = 2m - 7$

यहां $2m - 7$ एक व्यंजक है जो चर m तथा अचर 2 और 7 को प्रयोग करके बना है। व्यवकलन तथा गुणा की संक्रियाएं भी प्रयुक्त की गयी हैं।

उदाहरण-4 : यहां $2x + 3$ एक व्यंजक है जिसके बनाने में चर x तथा अचर 2 और 3 का प्रयोग किया गया है। योग तथा गुणा की संक्रियाएं भी प्रयुक्त की गयी हैं।

व्यंजकों, जैसे हमें उपर्युक्त दोनों उदाहरणों में प्राप्त हुए, को बीजीय व्यंजक कहा जाता है क्योंकि उनके बनने में दोनों चर तथा अचर प्रयुक्त किये जाते हैं।

इसलिए चार मूल संक्रियाओं +,–, x तथा ÷ अथवा इनमें से कुछ से जुड़े चरों और अचरों के संयोजन को एक बीजीय व्यंजक कहा जाता है।

उदाहरणार्थ : $7m$, $2py + 1$, -5, $m + n - 2$ बीजीय व्यंजक हैं। हम एक व्यंजक लिख सकते हैं, यदि हमें इसे बनाने के विषय में निर्देश दिये गए हों। अब उदाहरण को ध्यानपूर्वक देखकर सारणी को पूरा कीजिए :

निर्देश	**व्यंजक**
p में 16 जोड़ा गया	$p + 16$
r में से 25 घटाया गया	
p को (–6) से गुणा किया गया	
x को 3 से भाग दिया गया	
m को 3 से गुणा करके गुणनफल में 8 जोड़ा गया	

साथ ही, यदि एक बीजीय व्यंजक दिया हो, तो हम यह भी बता सकते हैं कि उसे किस प्रकार बनाया गया है। अब, उदाहरण का अध्ययन करके खाली बॉक्सों को भरिए।

व्यंजक	**कैसे बनाया गया**
$s - 1$	s में से 1 घटाया गया
$t + 25$	
$11a$	
$\frac{2b}{5}$	
$2n - 4$	

हमने देखा है कि व्यंजक में एक या एक से अधिक पद हो सकते हैं। एक बीजीय व्यंजक को उसमें शामिल पदों की संख्या के आधार पर विभिन्न श्रेणियों में वर्गीकृत किया गया है।

एकपदी : वह व्यंजक जिसमें केवल एक पद हो, एकपदी कहलाता है।

उदाहरण के लिए : $7xy$, $2x$, $-4n$, -8, $3a^2b$

द्विपदी : वह व्यंजक जिसमें केवल दो विजातीय पद हों, द्विपदी कहलाता है।

उदाहरण के लिए : $x + y$, $2p - 3q$, $z + 1$, $3xy + 2x$

टिप्पणी

त्रिपदी : वह व्यंजक जिसमें केवल तीन विजातीय पद हो, त्रिपदी कहलाता है।

उदाहरण के लिए : $2a - 5b + 3c$, $x + y - 3$, $pq + p - 2q$

बहुपद : वह व्यंजक, जिसमें दो या अधिक पद हो, सामान्यत: बहुपद कहलाता है।

उदाहरण के लिए : $5x$, $2a + 3b$, $m + n - 3$

क्या आप जानते हैं?

- $3xy$ एक द्विपदी नहीं है। बल्कि यह एकपदी है।
- $m + n - 3$ एक द्विपदी नहीं है। यह एक त्रिपदी है।
- $2a + 3a$ एक द्विपदी नहीं है। यहां पद विजातीय नहीं हैं।
- एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी सभी बहुपद हैं।

9.3.2 चर तथा अचर

आइए गणितीय कथन $P = 4a$ की जांच करें।

यहां, जब $a = 1$, तो	$p = 4 \times 1 = 4$
जब $a = 2$, तो	$p = 4 \times 2 = 8$
जब $a = 3$, तो	$p = 4 \times 3 = 12$

इस प्रकार हम देखते हैं कि a के विभिन्न मानों के लिए p का मान बदल जाता है अर्थात a के मान में बदलाव आने पर p बदल जाता है। हम कहते हैं कि a तथा p दोनों बदलने वाले अथवा चर हैं। अतएव, हम कह सकते हैं :

> एक प्रतीक, जिसका कोई निश्चित मान नहीं होता किन्तु आवश्यकतानुसार उसे कोई संख्यात्मक मान दिया जा सकता है, को चर कहा जाता है।

अच्छा, क्या किसी त्रिभुज की भुजाओं की संख्या 3 के अतिरिक्त कोई अन्य हो सकती है? निश्चित रूप से नहीं। अत: त्रिभुज की भुजाओं की संख्या एक निश्चित संख्या है और इसी कारण से यह एक अचर है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं :

> निश्चित संख्यात्मक मान रखने वाला प्रतीक अचर कहलाता है।

कथन $P - 4a$ में, 'a' तथा 'P' को चर तथा 4 को अचर कहा जाता है।

क्या आप जानते हैं?

- चर का कोई निश्चित मान नहीं होता।
- प्राय: अक्षर x, y, z, p, q, r चरों को निरुपित करने के लिए प्रयुक्त किये जाते हैं।
- सभी वास्तविक संख्याएं अचर हैं।
- चरों तथा अचरों से बीजीय व्यंजक बनाए जाते हैं।

उदाहरण-5 : पपलू ने 10 रुपये मूल्य वाले 2 एक जैसे कलम खरीदे। वह दुकानदार को कितने रुपये देगा?

स्पष्टत: दो कलमों का मूल्य = रु. 10×2 = रु. 20 जो पपलू दुकानदार को देगा। यहां पर कुल मूल्य = प्रत्येक वस्तु का मूल्य x वस्तुओं की संख्या यदि हम कुल मूल्य के लिए C तो वस्तुओं की संख्या के लिए n लें, तो उपर्युक्त कथन को लिखा जा सकता है : $C = 10n$

यहां n तथा C दोनों चर है तथा 10 अचर है।

उदाहरण-6 : ऐस्मा तथा रेशमा बहनें हैं। ऐस्मा रेशमा से 4 वर्ष बड़ी है। अब सारणी को पढ़िए तथा खाली बॉक्सों को भरिए :

वर्षों में रेशमा की आयु	*वर्षों में ऐस्मा की आयु*
7	$7 + 4 = 11$
9	
x	

अन्तिम बॉक्स में आपका उत्तर $(x + 4)$ होगा जिसका अर्थ है कि ऐस्मा की आयु $(x + 4)$ वर्ष होगी जब रेशमा की आयु x वर्ष होगी। यहां $x + 4$ एक बीजीय व्यंजक है जिसमें x एक चर तथा 4 एक अचर है।

अब, निम्नलिखित व्यंजकों में सम्मिलित चर, अचर लिखिए :

व्यंजक	**चर**	**अचर**
$y - 7$		
$\frac{s}{2} + 3$		
$2p + 3q$		

9.3.3 किसी बीजीय व्यंजक के पद

पूर्व चर्चा से हम जान चुके हैं कि एक बीजीय व्यंजक में एक या अधिक पद होते हैं। आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें :

उदाहरण-7 : $2p + 3$ एक व्यंजक है।

व्यंजक को बनाने में हमने अलग से 2 तथा p के गुणनफल के रूप में पहले 2p बनाया, तत्पश्चात् इसमें 3 जोड़ दिया।

उदाहरण 8 : $xy + 3z - 5$ एक व्यंजक है।

इस व्यंजक को बनाने में हमने पहले अलग से x तथा y के गुणनफल के रूप में xy बनाया।

टिप्पणी

तब 3 तथा z के गुणनफल के रूप में 3z अलग से बनाया। उसके पश्चात हमने उन्हें (xy तथा 3z को) जोड़ा और तब (−5) को उसमें जोड़कर व्यंजक प्राप्त किया।

आप पायेंगे कि पहले व्यंजकों के अलग अलग बनाये गए भाग है जिनको बाद में जोड़ दिया जाता है। व्यंजक के ऐसे भागों, जिन्हें पहले अलग से बनाया जाता है तथा फिर जोड़ा जाता है, को पद कहा जाता है।

किसी व्यंजक के विभिन्न भागों, जिन्हें एक दूसरे से चिन्हों '+' तथा '–' के द्वारा अलग किया जाता है, को व्यंजक के पद कहा जाता है।

क्या आप जानते हैं?

- पदों को जोड़कर व्यंजक बनाये जाते हैं।
- किसी पद से पहले वाला चिन्ह स्वयं पद से संबंधित होता है।

क्या आप निम्नलिखित व्यंजकों के पद तथा उनकी संख्या ज्ञात कर सकते हैं?

व्यंजक	पदों की संख्या	पदों के नाम

इसका प्रयास कीजिए : दो ऐसे व्यंजक लिखिए, जिनमें प्रत्येक में चार पद हों।

9.3.4 गुणनफल, गुणनखंड तथा गुणांक

पिछले अध्यायों से हम जानते हैं कि गुणन $2\times5=10$ में 10, 2 तथा 5 का गुणनफल और 2 तथा 5, 10 के दो गुणनखंड हैं।

जब दो चरों को गुणा किया जाता है, तो गुणनफल क्या होता है?

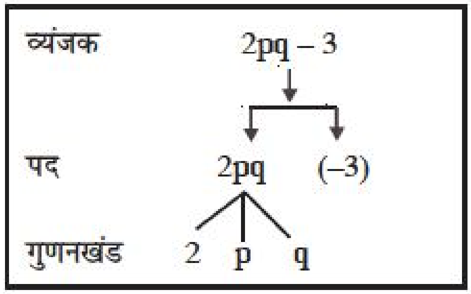
हम 3 और z का गुणनफल लिखते हैं $3\times z = 3z$

तथा y और z का गुणनफल लिखते हैं $y\times z = yz$

हमने ऊपर देखा कि किसी व्यंजक में एक अथवा अधिक पद होते हैं। उदाहरण के लिए व्यंजक $2ab - 3$ में दो पद, 2ab तथा −3 हैं। यहां 2ab, 2,a तथा b का गुणनफल है। हम कहते हैं कि 2, a तथा b, 2ab के गुणनखंड हैं।

हम किसी बीजीय व्यंजक को इसके संघटक पदों तथा पदों को गुणनखंडों में एक वृक्षारेख द्वारा निरुपित कर सकते हैं।

टिप्पणी



इनके लिए प्रयास कीजिए : निम्नलिखित के लिए वृक्षारेख खींचिए :

(i) $3xy + 5y$

(ii) $7ab - 5a + 2$

क्या आप जानते हैं?

- एक अचर गुणनखंड को एक राशि गुणनखंड कहा जाता है।
- एक चर गुणनखंड को एक शाब्दिक (बीजीय) गुणनखंड कहा जाता है।

उदाहरण-9 : व्यंजक $3xy - 5y$ में दो पद $3xy$ तथा $-5y$ है। किसी पद का संख्यात्मक गुणनखंड इसका संख्यात्मक गुणांक अथवा केवल **गुणांक** कहलाता है। xy का गुणांक 3 तथा y का गुणांक -5 है।

इनके लिए प्रयास कीजिए : निम्नलिखित व्यंजकों में पदों के गुणांकों की पहचान कीजिए:

(i) $-6ab$ (ii) $-\frac{pq}{3}$

9.3.5 सजातीय तथा विजातीय पद

आइए, पदों $2pq, -pq, 5pq, \frac{1}{2}pq$ के गुणनखंडों की जांच करें। इन पदों में एक समान शाब्दिक (बीजीय) गुणनखंड pq है किंतु भिन्न-भिन्न संख्यात्मक गुणनखंड हैं। किंतु पदों $2p, 3pq, -5q$ में शाब्दिक गुणनखंड भिन्न हैं। हम कहते है कि एक समान बीजीय गुणनखंड रखने वाले पद **समरुप** अथवा **सजातीय पद** होते हैं। जिन पदों में एक समान बीजीय गुणनखंड नहीं होते, वे पद **विजातीय पद** कहे जाते हैं।

उदाहरणार्थ : व्यंजक $2a + 5ab - 3a - b$ में पदों $2a$ तथा $-3a$ का एक समान बीजीय गुणनखंड a है। अत: वे सजातीय पद हैं। किंतु पदों $2a$ तथा $5ab$ के भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं, अत: ये विजातीय पद हैं। इसी प्रकार पद $5ab$ तथा $-b$ विजातीय पद हैं।

टिप्पणी

इनके प्रयास कीजिए :

प्रश्न 1 : 7x, 7, –8x, 8y, x, – y, 15y में से सजातीय पदों को एक साथ रखिए।

प्रश्न 2 : सारणी में खाली बॉक्सों को भरिए :

पद	गुणनखंड	बीजीय गुणनखंड समान अथवा भिन्न	सजातीय/विजातीय पद
$15x$ $12y$	$15, x$ $12, y$	भिन्न	विजातीय

अपनी प्रगति की जांच कीजिए :

अब, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देकर अब तक अध्ययन की गयी अवधारणाओं के प्रति अपनी समझ के आकलन का प्रयास कीजिए।

E1 चरों p तथा q का प्रयोग करते हुए कोई दो बीजीय व्यंजक लिखिए।

E2 निम्नलिखित दशाओं में व्यंजक लिखिए :

(i) x तथा y के गुणनफल के 5 गुने में 3 जोड़ा गया।

(ii) a तथा b का योग उनके गुणनफल से घटाया गया।

E3 $2y - 3z + 5$ में चरों तथा अचरों की पहचान कीजिए।

E4 प्रत्येक पद में x का गुणांक लिखिए :

(i) $-x$ (ii) $2xy + y^2 + z^2$ (iii) x^2y

E5 निम्नलिखित में सजातीय पदों की पहचान कीजिए :

2p, – pq, pqr, – 5, , 3pqr, 5pq

E6 निम्नलिखित एक पदी व्यंजकों में से प्रत्येक में गुणनखंड लिखिए:

(i) 5xy (ii) – 3abc

E7 प्रत्येक व्यंजक में पदों तथा गुणनखंडों की पहचान कीजिए:

(i) $3xy - 5y$ (ii) $ab+2a-3y$

9.4 बीजीय व्यंजकों पर संक्रियाएं

संक्रियाओं हम संख्याओं पर चार मूल योग, व्यवकलन, गुणा तथा भाग की जानकारी रखते हैं। यहां हम क्रमानुसार अंकगणित से बीजगणित की ओर चलेंगे तथा सीखेंगे कि ये संक्रियाएं शाब्दिक संख्याओं पर किस प्रकार कार्य करती हैं। क्योंकि अक्षर संख्याओं को निरुपित करते हैं, वे संख्याओं के योग, व्यवकलन गुणा तथा भाग के सभी नियमों तथा गुणों का पालन करते हैं।

हम बीजगणित में विभिन्न संक्रियाएं दो स्थितियों में सम्पन्न करेंगे :

(i) अक्षरों पर संक्रियाएं

(ii) व्यंजक पर संक्रियाएं

9.4.1 योग

वास्तविक जीवन की अनेक समस्याओं में हमें बीजीय व्यंजकों के प्रयोग तथा उन पर अंकगणितीय संक्रियाओं के अनुप्रयोग की आवश्यकता होती है। आइए देखें कि व्यंजकों का योग कैसे किया जाता है।

(a) अक्षरों/एक पदियों का योग

हम सीख चुके हैं कि $2 + 2 + 2 = 2 \times 3 = 3 \times 2$

इसी प्रकार हम प्राप्त कर सकते हैं

$$x + x + x = x \times 3 = 3 \times x = 3x$$

तथा $x + x + x + x + x = x \times 5 = 5 \times x = 5x$

अब, $3x$ तथा $5x$ का योग $= 3x + 5x$

$$= (x + x + x) + (x + x + x + x + x)$$
$$= x + x + x + x + x + x + x + x$$
$$= 8x$$

साथ ही, $3x+5x = 3 \times x + 5 \times x$

$= (3 + 5) \times x$ [वितरण नियम]

$= 8 \times x$

$= 8x$

उदाहरण-10 : 5ab, 7ab तथा ab का योग ज्ञात कीजिए।

हल : योग $= 5ab + 7ab + ab$

$= 5 \times ab + 7 \times ab + 1 \times ab$

$= (5 + 7 + 1) \times ab = 13 \times ab = 13\ ab$

अत: $5ab + 7ab + ab = 13\ ab$

इनका प्रयास कीजिए :

प्रश्न : निम्नलिखित योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) $3p,\ p$ तथा $7p$ (ii) $6xyz$ तथा $12xyz$

इस प्रकार हम दो या अधिक सजातीय पदों का योग करना जानते हैं। अब विजातीय पदों के योग पर विचार कीजिए।

आइए 5 आम और 3 सन्तरों का योग ज्ञात करें।

हम यह नहीं कह सकते कि योग 8 आम अथवा 8 सन्तरें है।

इसी प्रकार $5x$ तथा $3y$ का योग एक पद नहीं हो सकता हम परिणाम को $5x + 3y$ लिखते हैं जहां दोनों पदों को वैसा ही रखा जाता है।

(b) बीजीय व्यंजकों का योग

आइए, निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें :

उदाहरण-11 : $5a + 7$ तथा $2a - 5$ का योग ज्ञात कीजिए।

योगफल $= 5a + 7 + 2a - 5$

$= (5a + 2a) + (7 - 5)$ [सजातीय पदों को एक साथ रखने पर]

$= 7a + 2$

उदाहरण-12 : $4x + 3y,\ 8 + 2x$ तथा $2y - 5$ को जोड़िए।

योगफल $= 4x + 3y + 8 + 2x + 2y - 5$

$= (4x + 2x) + (3y + 2y) + (8 - 5)$ [पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर]

$= 2x + 5y + 3$

इनका प्रयास कीजिए :

व्यंजकों का योग ज्ञात कीजिए :

(i) $mn + 5$ तथा $2nm - 7$ (ii) $2a + 3b - 1;\ 3a + 7$ तथा $5b - 3$

नोट : व्यंजक योग में संवृतता, क्रमविनिमेय तथा सहचारी गुणों का पालन करते हैं। इसमें योज्य तत्समक तथा योज्य प्रतिलोम भी होते हैं।

9.4.2 व्यवकलन

हम पहले से ही पूर्णांकों में व्यवकलन करना जानते हैं। वही सिद्धांत बीजीय व्यंजकों के साथ भी कार्य करता है।

(a) **एक पदियों का व्यवकलन :** आइए $5x$ में से $2x$ घटाएं।

$$\begin{aligned} 5x - 2x &= (x + x + x + x + x) - (x + x) \\ &= x + x + x + x + x - x - x \\ &= x + (-x) + x + (-x) + x + x + x \quad \text{[क्योंकि } x \text{ तथा } -x \text{ एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम हैं।]} \\ &= 0 + 0 + x + x + x \\ &= 0 + 3x \\ &= 3x \end{aligned}$$

संक्षेप में, हम इस प्रक्रिया को नीचे दी गयी प्रक्रिया के अनुसार भी कर सकते हैं

$$\begin{aligned} 5x - 2x &= 5 \times x - 2 \times x \\ &= (5 - 2) \times x = 3 \times x = 3x \end{aligned}$$

उदाहरण 13 : आइए एक अन्य उदाहरण देखें :

16 mn से 7mn घटाइए।

$$16\text{mn} - 7\text{mn} = 16 \times \text{mn} - 7 \times \text{mn} = (16 - 7) \times \text{mn} = 9 \times \text{mn} = 9\text{mn}$$

किन्तु दो विजातीय पदों का अंतर एकपदी नहीं होगा अपितु यह एक द्विपदी होगा। उदाहरण के लिए, $5x$ तथा 3y का अंतर $= 5x - 3y$

इनका प्रयास कीजिए :
(i) 11m में से 5m (ii) 10 ab में से 6ab (iii) 3xy में से 5xy घटाइए।

(b) **बीजगणितीय व्यंजकों का व्यवकलन :** घटाने की प्रक्रिया योग की प्रक्रिया के अनुरूप ही है। आइए निम्नलिखित उदाहरण का ध्यानपूर्वक अवलोकन करें:

उदाहरण 14 : $4a + 5b - 2$ में से $3a + 2b$ घटाइए।

हल :

$$\begin{aligned} &= 4a + 5b - 2 - (3a + 2b) = 4a + 5b - 2 - 3a - 2b \\ &= (4a - 3a) + (5b - 2b) - 2 \\ &= a + 3b - 2 \end{aligned}$$

वैकल्पिक विधि : हम व्यंजकों को एक दूसरे के नीचे लिखेंगे ताकि सजातीय पद एक स्तंभ में रहें तथा नीचे के प्रदर्शन के अनुसार पदों में से प्रत्येक पर घटाने की प्रक्रिया करेंगे :

$$\begin{array}{r} 4a + 5b - 2 \\ -\ 3a + 2b \\ \hline a + 3b - 2 \end{array}$$

इनका प्रयास कीजिए

घटाइए : (i) $10x + 7b - 3$ में से $5x - 9$

(ii) $6pq - 1 + 3pq$ में से $4pq - 5p + 2$

9.4.3 गुणा

(a) एकपदियों की गुणा

$a \times a = a^2$ जहां 2 वह संख्या है जो a की संख्याओं को निरुपित करती है। a^2 में संख्या 2 को **घातांक** अथवा a की **घात** तथा 'a' को **आधार** कहा जाता है।

सारणी को भरने का प्रयास कीजिए :

a की संख्या	गुणनफल	आधार	घातांक
तीन बार 'a' का गुणनफल	a^3	a	3
$a \times a \times a \times a$			
$a \times a \times a \times a \times a$			

आइए दो पदों को गुणा करना सीखें।

a तथा b का का गुणनफल, अर्थात् $a \times b$ को संक्षेप में ab लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार, $a \times a \times b = a^2b$

$a \times a \times b \times b = a^2\, b^2$, इत्यादि

क्या है (i) $x \times x \times x \times y \times y =$ ....?

(ii) $m \times m \times m \times n \times n \times n =$ ....?

आइए, अब कुछ और उदाहरणों पर चर्चा करें।

उदाहरण-15 $2x$ को $3y$ से गुणा कीजिए।

$2x \times 3y = 2 \times x \times 3 \times y$

$= 2 \times 3 \times x \times y$ (गुणन की क्रमविनिमेयता द्वारा)

$= 6xy$

टिप्पणी

उदाहरण-16 3mn को – 5 mn से गुणा कीजिए

$$
\begin{aligned}
3\,mn \times (-5\,mn) &= 3 \times m \times n \times (-5) \times m \times n \\
&= 3 \times (-5) \times (m \times m) \times (n \times n) \\
&= -15 \times m^2 \times n^2 \\
&= -15\, m^2 n^2
\end{aligned}
$$

उदाहरण-17 –5 pq, 4pqr तथा 2r का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

$$
\begin{aligned}
(-5\,pq) \times 4pqr \times 2r &= (-5) \times p \times q \times 4 \times p \times q \times r \times 2 \times r \\
&= (-5) \times 4 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times r \times r \\
&= -40 \times p^2 \times q^2 \times r^2 \\
&= -40\, p^2 q^2 r^2
\end{aligned}
$$

इनका प्रयास कीजिए:

गुणनफल ज्ञात कीजिए (i) $4xy \times 2x^2$ (ii) $5m \times 3n \times 7mn$

(b) किसी एकपद की बहुपद के साथ गुणा

इस गुणा के लिए क्रमविनिमेय, सहचारी तथा वितरण गुणों का प्रयोग आवश्यकतानुसार किया जाता है।

उदाहरण-18 $(3x - 5)$ को से $2x$ गुणा कीजिए :

$$
\begin{aligned}
\text{गुणनफल} &= (3x - 5) \times 2x \\
&= 3x \times 2x - 5 \times 2x \ (\text{वितरण नियम}) \\
&= 3 \times 2 \times x \times x - 5 \times 2 \times x \\
&= 6x^2 - 10x
\end{aligned}
$$

उदाहरण-19 3a की $(5a - 2b + 4)$ के साथ गुणा कीजिए।

$$
\begin{aligned}
\text{गुणनफल} &= 3a \times (5a - 2b + 4) \\
&= 3a \times 5a + 3a \times (-2b) + 3a \times 4 \ (\text{वितरण नियम}) \\
&= 3 \times a \times 5 \times a + 3 \times a \times (-2) \times b + 3 \times a \times 4 \\
&= 3 \times 5 \times a \times a + 3 \times (-2) \times a \times b + 3 \times 4 \times a \\
&= 15a^2 - 6ab + 12a
\end{aligned}
$$

इनका प्रयास कीजिए :

गुणनफल ज्ञात कीजिए (i) $2x - 3y$ तथा $5xy$ का

(ii) 3mn तथा $(5m - 7mn + 3n)$ का

टिप्पणी

(c) किसी बहुपद की एक बहुपद से गुणा

यहां भी हम वितरण नियम का प्रत्येक करते हैं।

उदाहरण-20 $(a + b)$ को $(3a - 5b)$ से गुणा कीजिए।

हल : $(a + b)(3a - 5b)$

$= a(3a - 5b) + b(3a - 5b)$ [वितरण नियम]

$= a \times 3a - a \times 5b + b \times 3a - b \times 5b$

$= 3 \times a \times a - 5 \times a \times b + 3 \times a \times b - 5 \times b \times b$ [सहचारी तथा क्रमविनिमेय गुण]

$= 3a^2 - 5ab + 3ab - 5b^2$

$= 3a^2 - 2ab - 5b^2$

उदाहरण-21 $(2x + 5)$ को $(x^2 - 3x + 2)$ से गुणा कीजिए

हल : $(2x + 5) \times (x^2 - 3x + 2)$

$= 2x \times (x^2 - 3x + 2) + 5(x^2 - 3x + 2)$ [वितरण नियम]

$= 2x \times x2 - 2x \times 3x + 2x \times 2 + 5 \times x2 - 5 \times 3x + 5 \times 2$

$= 2x3 - 2 \times 3 \times x \times x + 2 \times 2x + 5x2 - 15x + 10$

$= 2x3 - 6x2 + 5x2 + 4x - 15x + 10$

$= 2x3 + (-6 + 5)x2 + (4 - 15)x + 10$

$= 2x3 - x2 - 11x + 10$

इनका प्रयास कीजिए
गुणनफल ज्ञात कीजिए : (i) $(2m + 3n)$ तथा $(m - 2n)$ का
(ii) $(pq - 1)$ तथा $(2p + 3q - 5)$ का

9.4.4 भाग

आप संख्याओं के भाग की प्रक्रिया जानते हैं। एक बीजीय व्यंजक को दूसरे से भाग करने में उसी के अनुरूप प्रक्रिया का अनुसरण किया जाता है।

(a) किसी एकपदी का एकपदी से भाग

भाग के चरण :

(i) भाज्य को अंश तथा भाजक को हर के रूप में लिखिए।

(ii) अंश तथा हर दोनों को गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(iii) अंश तथा हर से सार्वगुणनखंडों को काट कर भिन्न को सरल कीजिए।

अब निम्नलिखित उदाहरणों पर ध्यान केंद्रित कीजिए :

उदाहरण 22

(i) 15 mn का 5m से भाग = $\dfrac{15mn}{5m} = \dfrac{3 \times 5 \times m \times n}{5 \times m} = 3n$

टिप्पणी

(ii) $18x^2y^2 \div (-6xy) = \dfrac{18x^2y^2}{-6xy} = \dfrac{3\times6\times x\times x\times y\times y}{-6\times x\times y} = -3xy$

इनका प्रयास कीजिए

भाग दीजिए (i) $25xy$ को $-5y$ से (ii) $30a^2b^2c$ को $6ab$ से

(b) एक व्यंजक का किसी एकपदी से भाग

यहां भाज्य एक बहुपद तथा भाजक एक एकपदी है। भाग के लिया क्रिया विधि है :

- भाज्य के प्रत्येक पद को भाजक से भाग दीजिए।
- पहले के अनुसार प्रत्येक भिन्न को सरल कीजिए।

आइए नीचे दिए गए उदाहरणों को हल करें

उदाहरण-23

(i) $9x^2 - 15xy$ को $3x$ से भाग दीजिए।

अब, $(9x^2 - 15xy) \div (3x) = \dfrac{9x^2 - 15xy}{3x} = \dfrac{9x^2}{3x} - \dfrac{15xy}{3x} = 3x - 5y$

(ii) $8a^2b - 12ab^2 + 20ab$ को $(-4\,ab)$ से भाग दीजिए।

अब, $(8a^2\,b - 12ab^2 + 20ab) \div (-4ab) = -2a + 3b - 5$

इनका प्रयास कीजिए :

भाग दीजिए (i) $6m^2n - 9mn^2$ को $3mn$ से

(ii) $10x^3y = 15x^2y^2$ को $5xy$ से

(c) किसी बहुपद का एक बहुपद से भाग

आम संख्याओं में किसी भाज्य को भाजक द्वारा भाग की लम्बी प्रक्रिया द्वारा भाग देना हम जानते हैं। जहां हमें उसी के अनुरूप प्रक्रिया का पालन करना है।

उदाहरण-24

$11x + 15x^2 - 12$ को $5x - 3$ से भाग दीजिए।

चरण-1

भाज्य तथा भाजक के पदों को बहुपदों में समाहित किसी एक चर की अवरोही घातों में व्यवस्थित कीजिए।

भाज्य $= 15x^2 + 11x - 12$

भाजक $= 5x - 3$

चरण-2

भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग दीजिए तथा भागफल का पहला पद प्राप्त कीजिए।

यहां $\dfrac{15x^2}{5x} = 3x$

चरण-3

भाजक $(5x - 3)$ के प्रत्येक पद को $3x$ से गुणा कीजिए $3x \times (5x - 3) = 15x^2 - 9x$

चरण-4

अब परिणाम को भाज्य के नीचे लिखिए और इसे भाज्य से घटाइए–

$$\begin{array}{l} \cancel{15x^2} + 11x - 12 \\ \cancel{15x^2} - 9x \\ - \quad\; + \\ \hline \quad\; 20x - 12 \\ \hline \end{array}$$

चरण-5

चरणों 2 तथा 3 की प्रक्रिया को $20x - 12$ को नये भाज्य के रूप में लेकर दोहराइए।

यहां भागफल का दूसरा पद $= \dfrac{20x}{5x} = 4$

अब भाजक को 4 से गुणा करिए $4 \times (5x - 3) = 20x - 12$

अब, भागफल के दूसरे पद तथा भाजक का गुणनफल नये भाज्य से घटाया जाता है।

$$\begin{array}{c} 20x - 12 \\ 20x - 12 \\ \hline = \;\; 0 \end{array}$$ परिणाम '0' है।

अतएव, भागफल $= 3x + 4$ तथा शेषफल $= 0$

अतएव, $(15x^2 - 11x - 12)\,(5x - 3) = 3x + 4$

इस प्रकार हम एक बहुपद को दूसरे बहुपद से ऊपर दी गयी लम्बी भाग की प्रक्रिया द्वारा भाग दे सकते हैं।

नोट : भाज्य के पहले पद की घात भाजक के पहले पद की घात से कम नहीं होनी चाहिए।

अब, अपनी प्रगति की जांच का प्रयास कीजिए :

E8 सरल कीजिए : $5x^2 - 6xy - y^2 - 2x^2 - 3y^2 + 2xy - 2y^2 + x^2$

E9 $2m - 3n + 5$ तथा $8 + 4n$ के योग से $3m - 5n + 7$ घटाइए।

E10 खाली स्थान भरिए : $(a^2 - 5ab - 3a + 7) + (\ldots\ldots\ldots\ldots) = 3a^2 + 2ab - 5b + 2$

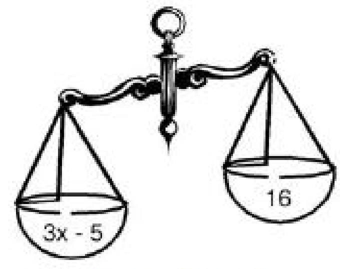
E11 गुणा कीजिए : (a) $3x - 2$ को $2x + 3$ से

(b) $(p^2 + pq + q^2)$ को $(p-q)$ से

E12 $3a^3 + 16a^2 + 20 + 21a$ को $a + 4$ से भाग दीजिए।

9.5 रैखिक बीजीय समीकरण तथा इसका हल

एक समीकरण की तुलना साम्यावस्था में एक तराजू से की जा सकती है। तराजू के दो पलड़ों की तुलना समीकरण के दो पक्षों - बांयां पक्ष तथा दायां पक्ष से कर सकते हैं। समानता का चिन्ह यह सूचित करता है कि पलड़े संतुलित हैं। उदाहरण के लिए समीकरण $3x - 5 = 16$ में बांयां पक्ष $3x - 5$ बायें पलड़े में है तथा दायां पक्ष 16 तराजू के दायें पलड़े में है। साथ ही तराजू साम्यावस्था में है क्योंकि समीकरण के दोनों पक्षों के मान समान है। समीकरण में x एक अज्ञात राशि के रूप में है।



तराजू का चित्र

उप-इकाई में बीजीय समीकरणों सर्वाधिक मौलिक रूप अर्थात रैखिक समीकरण पर विस्तार से चर्चा की गयी है। इन समीकरणों को हल करने पर भी चर्चा की जायेगी।

9.5.1 रैखिक बीजीय समीकरण

आइए एक सरल समस्या 'एक ऐसी संख्या ज्ञात करना जिसके दुगुने में 5 जोड़ने पर 15 आता हो' पर चर्चा करें।

इस दशा में गणितीय कथन लिखने के लिए, हम अज्ञात राशि x लेते हैं, फिर इसे दुगुना करते हैं तथा $2x$ प्राप्त करते हैं। इसमें 5 जोड़ने पर परिणाम होता $2x + 5$ है। हम जानते हैं कि यह 15 के बराबर है। अतएव, गणितीय कथन $2x + 5 = 15$ बनता है जो उपर्युक्त दशा में समीकरण है।

जब किसी प्रतीक (अज्ञात राशि के लिए लिया गया) का प्रयोग करके एक बहुपद बनाया जाता है तथा इसे किसी संख्या के बराबर रखा जाता है, तो बनाया गया कथन एक समीकरण होता है।

टिप्पणी

अतः $2x + 5 = 15$ बीजगणितीय समीकरणों के सरल रूपों में एक है। आइए उदाहरण का प्रेक्षण करें तथा सारणी में समीकरण लिखें।

कथन	समीकरण
किसी संख्या x तथा 7 का योग 16 हैं।	$x + 7 = 16$
y में से 3 घटाने पर 10 प्राप्त होता है।	
n का 9 गुना 36 के बराबर है।	
m का तीन-चौथाई 12 के बराबर है।	

जो समीकरण आपने ऊपर सारणी में लिखे, उन्हें एक अज्ञात राशि में रैखिक समीकरण कहा जाता है तथा अज्ञात राशि की घात 1 है। अतएव, हम कहते हैं :

कोई समीकरण, जिसमें केवल एक रैखिक बहुपद का समावेश हो, एक **रैखिक समीकरण** कहलाता है। सामान्यतः एक रैखिक समीकरण $ax + b = 0$ के रूप का होता है जहां a, b संख्याएं तथा x एक अज्ञात राशि है।

रैखिक समीकरणों को **प्रथम घात** समीकरण भी कहा जाता है। हम अपनी वर्तमान चर्चा केवल ऐसे समीकरणों तक ही सीमित रखेंगे।

नोट :

- समीकरण $x^2 + 7x + 6 = 0$ रैखिक नहीं है क्योंकि अज्ञात का घातांक 2 है।
- समीकरण $x + zy = 5$ रैखिक है किन्तु इसमें 2 अज्ञात राशि x तथा y हैं।

रैखिक समीकरण $x + 7 = 16$ पर विचार कीजिए। x का क्या मान है? हम x के लिए पूर्णांकों 1, 2, 3..... की जांच करेंगे जब तक कि हमें दोनों पक्ष बराबर न मिल जाएं। परीक्षण से यह देखा जा सकता है कि $x = 9$ रखने पर समीकरण के दोनों पक्ष बराबर होते हैं। x के किसी अन्य मान के लिए समीकरण संतुष्ट नहीं होता।

इस प्रकार हमें पता चलता है कि अज्ञात के केवल एक मान के लिए समीकरण संतुष्ट होता है अर्थात उसके दोनों पक्षों के मान बराबर होते हैं।

उदाहरण के लिए, समीकरण $2y = 6$ केवल $y = 3$ के लिए संतुष्ट होता है। इसी प्रकार समीकरण $m - 3 = 4$ केवल $m = 7$ के लिए संतुष्ट होता है।

अज्ञात राशि का वह मान, जिससे समीकरण एक सत्य कथन बन जाता है, समीकरण का **हल** अथवा **मूल** कहलाता है।

समीकरण को हल करने से अभिप्राय अज्ञात का मान ज्ञात करना है जिससे समीकरण संतुष्ट होता है।

टिप्पणी

एक रैखिक समीकरण को हल करने की प्रक्रिया

(a) परीक्षण (जांच) की प्रक्रिया

आइए सारणी को पूरा करें तथा सारणी की जांच द्वारा समीकरण $x + 7 = 16$ का हल ज्ञात करें।

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x + 7$									

यहां हम x के पूर्णांकों से जांच करते चले जाते हैं जब तक कि समीकरण संतुष्ट न हो जाए। इस प्रकार से हम अज्ञात का मान प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रक्रिया को **परीक्षण की प्रक्रिया** कहते हैं। आपने देखा है कि बहुत से असफल परीक्षणों के बाद हम अज्ञात का वह मान प्राप्त कर पाये जिससे समीकरण संतुष्ट होता है। अतएव, यह प्रक्रिया थकाने वाली और अधिक समय लेने वाली है तथा हम प्राय: हल ज्ञात करने में असफल रहते हैं यदि यह एक भिन्नात्मक संख्या है।

इनका प्रयास कीजिए

परीक्षण की प्रक्रिया से समीकरण को हल कीजिए।

(i) $m - 5 = 16$ (ii) $2y - 1 = 17$

(b) जोड़ने अथवा घटाने की प्रक्रिया

जैसा पहले बताया जा चुका है, एक समीकरण की तुलना साम्यावस्था में एक तराजू से की जा सकती है। समीकरण के दो पक्ष तराजू के दो पलड़ों की तरह हैं तथा समानता का चिन्ह बताता है कि पलड़े संतुलित हैं। किसी समीकरण पर गणितीय संक्रिया करना तराजू के पलड़ों में भार रखने अथवा भार हटाने के समान है। यदि हम दोनों पलड़ों में समान भार संयोजित करते हैं, तराजू का संतुलन बना रहता है। इसी प्रकार, यदि हम दोनों पलड़ों से समान भार हटाते हैं, तो भी तराजू का संतुलन बना रहता है। इसके विपरीत, यदि हम भिन्न भार संयोजित करते अथवा हटाते हैं तो संतुलन बिगड़ जाता है अर्थात तराजू का दंड (तुला दंड) क्षैतिज नहीं रहता। समीकरण को हल करने में हम इस सिद्धांत का प्रयोग करते हैं।

मान लीजिए 'x' तराजू के बायें पलड़े पर रखे चावल के पैकट का भार निरुपित करता है तथा दायें पलड़े पर एक भार 'w' रखा है जैसे तराजू साम्यावस्था में रहती है, तब हम कहते हैं: $x = w$

स्थिति-I

यदि हम एक भार 'c' दोनों पलड़ों पर संयोजित करें, तो क्या दंड क्षैतिज रहेगा अथवा एक ओर झुक जायेगा?

निश्चित रूप से यह क्षैतिज रहेगा।

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं, $x + c = w + c$

स्थिति-II

यदि हमने भार 'c' दोनों पलड़ों से हटा दिया होता, तो क्या दंड क्षैतिज रहता अथवा एक ओर झुक जाता?

निश्चित रूप से यह क्षैतिज रहता।

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं, $x - c = w - c$

स्थिति-III

इसी प्रकार, यदि हम दोनों पलड़ों के भारों को 'c' गुना कर दें, तो दंड फिर भी क्षैतिज रहेगा।

इस स्थिति का गणितीय निरुपण है : $xc = wc$

स्थिति-IV

यदि हम दोनों पलड़ों के भारों को $\frac{1}{c}$ (जहाँ $c \# 0$) गुना कर दें, तो दंड फिर भी क्षैतिज रहेगा अर्थात तराजू का संतुलन बना रहेगा।

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं, $= \frac{x}{c} = \frac{w}{c}$ (जहां $c \# 0$)

एक तराजू से तौलने के उपर्युक्त गुणों से, हमें एक समीकरण हल करने के लिए समानता के चार नियम प्राप्त हुए। ये नियम सही तरीके से रैखिक समीकरणों को हल करने में सहायता प्रदान करते हैं। इन नियमों को नीचे लिखा गया है :

- किसी समीकरण के दोनों पक्षों में समान राशि संयोजित की जा सकती है तथा इससे समानता नहीं बदलती।
- किसी समीकरण के दोनों पक्षों से समान राशि हटाई जा सकती है, तथा इससे समानता नहीं बदलती।
- किसी समीकरण के दोनों पक्षों को समान संख्या से गुणा किया जा सकता है तथा इससे समानता नहीं बदलती।
- किसी समीकरण के दोनों पक्षों को एक शून्येतर संख्या से भाग दिया जा सकता है तथा उससे समानता नहीं बदलती।

आइए रैखिक समीकरणों को हल करने में उपरोक्त नियमों का अनुप्रयोग करें।

टिप्पणी

उदाहरण-25 : हल कीजिए : $y-5=11$

समीकरण को हल करने से अभिप्राय अज्ञात का मान ज्ञात करना है।

अतः $y-5=11$

$\Rightarrow (y-5)+5=11+5$ (दोनों पक्षों में 5 जोड़ने पर)

$\Rightarrow y+(-5+5)=16$ (सहचारिता)

$\Rightarrow y+0=16$ (योज्य प्रतिलोम)

$\Rightarrow y=16$ (योज्य तत्समक)

उदाहरण 26 : हल कीजिए : $z+4=8$

हल : $z+4=8$

$\Rightarrow (z+4)-4=8-4$ (दोनों पक्षों में 4 जोड़ने पर)

$\Rightarrow z+(4-4)=4$ (सहचारिता)

$\Rightarrow z+0=4$ (योज्य प्रतिलोम)

$\Rightarrow z=4$ (योज्य तत्समक)

उदाहरण 27 : हल कीजिए : $\frac{x}{3}=12$

$\Rightarrow \frac{x}{3}\times 3=12\times 3$ (दोनों पक्षों को 3 से गुणा करने पर)

$\Rightarrow x\times(\frac{1}{3}\times 3)=36$ (सहचारिता)

$\Rightarrow x\times 1=36$ (गुणन प्रतिलोम)

$\Rightarrow x=36$ (गुणन तत्समक)

उदाहरण 28 : हल कीजिए : $5x-2=28$

हल : यहां संख्यात्मक पद (अचर) को पहले विलुप्त करना है।

अत : $5x-2=28$

$\Rightarrow (5x-2)+2=28+2$ (दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर)

$\Rightarrow 5x+(-2+2)=30$ (सहचारिता)

$\Rightarrow 5x+0=30$ (योज्य प्रतिलोम)

$\Rightarrow 5x=30$ (योज्य तत्समक)

$\Rightarrow \frac{5x}{5}=\frac{30}{5}$ (दोनों पक्षों को 5 से भाग देने पर)

$\Rightarrow x=6$ (उत्तर)

नोट : अभ्यास में हम उन चरणों को प्रदर्शित नहीं करेंगे जहां नियमों/गुणों के अनुप्रयोग किये जाते हैं।

इनका प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए :

(i) $3x+2=14$ (ii) $\frac{x}{4}-1=5$

(c) पक्षान्तरण की प्रक्रिया

किसी रैखिक समीकरण को हल करते समय, हम समीकरण के दोनों पक्षों में एक संख्या को जोड़ने अथवा घटाने के स्थान पर इसे बायें पक्ष से दायें पक्ष को तथा विलोमत: पक्षान्तरित कर सकते हैं। ऐसा करने में, संख्या पर संक्रिया एक पक्ष से दूसरे पक्ष को स्थानान्तरित करने में बदल ही जाती है। अर्थात एक पद को एक पक्ष से दूसरे पक्ष को ले जाने पर

(i) योग व्यवकलन में बदल जाता है।

(ii) व्यवकलन योग में बदल जाता है।

(iii) गुणा भाग में बदल जाता है।

(iv) भाग गुणा में बदल जाता है।

इन्हें पक्षान्तरण के नियम कहते हैं।

आइए, निम्नलिखित समीकरणों को हल करने में इनका अनुप्रयोग करे।

उदाहरण 29 : हल कीजिए : $2x-7=5$

हल : $2x-7=5$

$\Rightarrow 2x=5+7$ (7 को दायें पक्ष में स्थानांतरित करने पर)

$\Rightarrow 2x=12$

$\Rightarrow x=\frac{12}{2}$ (2 को दायें पक्ष में स्थानांतरित करने पर)

$\Rightarrow x=6$

उदाहरण 30 : हल कीजिए : $\frac{5y-2}{3}=6$

हल : $\frac{5y-2}{3}=6$

$\Rightarrow 5y-2=6\times 3$

$\Rightarrow 5y-2=18$

$\Rightarrow 5y=18+2$

$\Rightarrow 5y = 20$

$\Rightarrow y = \dfrac{20}{5} = 4$

$\therefore y = 4$

इनका प्रयास कीजिए

पक्षान्तरण द्वारा हल कीजिए :

(i) $3p + 2 = 17$ (ii) $2(x + 4) = 12$

(d) वज्र गुण (आर-पार गुणा) का नियम

यदि समीकरण में एक भिन्न का समावेश है, तो आइए बिना समानता में कोई बाधा उत्पन्न किए भिन्न को हटाने की एक सरलतम विधि सीखें।

मान लीजिए समीकरण का रूप $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ है।

$\Rightarrow a = \dfrac{c}{d} \times b$ (b को दायें पक्ष में स्थानांतरित करने पर)

$\Rightarrow a = \dfrac{c \times b}{d}$

$\Rightarrow a \times d = c \times b$ (d को बायें पक्ष में स्थानांतरित करने पर)

इस प्रकार, हम ज्ञात करते हैं :

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow a \times d = c \times b$

अन्यथा :- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{d} \times bd = \dfrac{c}{d} \times bd$ (दोनों पक्षों को 'bd' से गुणा करने पर)

$\Rightarrow ad = cb$

इसे गुणन अथवा आर-पार की गुणा का नियम कहा जाता है।

और अच्छी प्रकार से समझने के लिए आइए कुछ उदाहरणों का प्रेक्षण करें।

उदाहरण 31 : हल कीजिए : $\dfrac{3x+1}{2} = \dfrac{x+7}{4}$

हल : $\frac{3x+1}{2}=\frac{x+7}{4}$

$\Rightarrow$ $(3x+1)\times 4=(x+7)\times 2$ (आर-पार की गुणा द्वारा)

$\Rightarrow$ $12x+4=2x+14$ (वितरण नियम)

$\Rightarrow$ $12x-2x=14-4$ (अज्ञात पदों को वाम पक्ष में तथा अचरों को दायें

$\Rightarrow$ $10x=10$

$\Rightarrow$ $x=\frac{10}{10}$ (10 को दायें पक्ष में स्थानांतरित करने पर)

$\Rightarrow$ $x=1$ (आर-पार की गुणा द्वारा)

उदाहरण 32 : हल कीजिए : $\frac{3y-1}{2y+3}=\frac{5}{7}$

हल : $\frac{3y-1}{2y+3}=\frac{5}{7}$

$\Rightarrow$ $(3y-1)\times 7=(2y+3)\times 5$ (आर-पार की गुणा द्वारा)

$\Rightarrow$ $21y-7=10y+15$

$\Rightarrow$ $21y-10y=15+7$

$\Rightarrow$ $11y=22$

$\Rightarrow$ $y=\frac{22}{11}=2$

इस प्रकार, हमने एक चर (अज्ञात) में किसी रैखिक समीकरण को हल करने की चार प्रक्रियाओं पर चर्चा की है। उनमें पक्षान्तरण तथा वज्र गुणन (आर-पार की गुणा) की प्रक्रियाओं को अधिकांशतः प्रयुक्त किया जाता है।

अब, अपनी प्रगति की जांच के लिए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास कीजिए :

E13 निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $7x=28$ (ii) $3y-2=19$ (iii) $\frac{x}{2}-3=6$

E14 निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $28=4+3(t+5)$ (ii) $2(2p-3)=6$

E15 निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $\frac{8x}{3x+6}=\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{2x+3}{3x+7}=\frac{5}{8}$

9.6 शाब्दिक समस्याओं का हल/बीजीय विधियों का अनुप्रयोग

हम सीख चुके हैं कि किसी गणितीय कथन को एक सरल समीकरण में कैसे परिवर्तित करते हैं। हम सरल समीकरणों को हल करना भी सीख चुके हैं। वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने में आवेष्टित विधि के चरण हैं :

(i) शाब्दिक समस्या में व्यक्त स्थिति को समझना

(ii) किसी प्रतीक का चयन करना तथा इसे निर्धारित की जाने वाली अज्ञात राशि के लिए प्रतिस्थापित करना

(iii) समस्या में दिये गए संबंध से एक समीकरण लिखना

(iv) समीकरण को हल करना तथा अज्ञात राशि का मान ज्ञात करना

(v) हल के औचित्य को सत्यापित करना

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर चर्चा करें।

उदाहरण-33 : मीता किसी संख्या पर विचार करती है। यदि वह संख्या के 4 गुने में से 7 घटाती है, तो उसे परिणाम 17 प्राप्त होता है। वह संख्या क्या है?

हल : मान लीजिए मीता द्वारा सोची गयी संख्या x है।

संख्या का 4 गुणा $= 4x$

$4x$ में से 7 घटाने पर मीता को प्राप्त होता है $4x - 7$

प्रश्नानुसार, $4x - 7 = 17$

इस प्रकार हमें x के लिए समीकरण प्राप्त हुआ।

आइए, समीकरण $4x - 7 = 17$ को हल करें

$\Rightarrow 4x = 17 + 7$

$\Rightarrow 4x = 24$

$\Rightarrow x = \frac{24}{4}$

$\Rightarrow x = 6$

अतः वांछित संख्या 6 है।

उत्तर की जांच : बायां पक्ष $4x - 7 = 4 \text{ x } 6 - 7 = 24 - 7 = 17 =$ दायां पक्ष जैसा वांछित था।

उदाहरण 34 : विक्की, रिक्की से आयु में 5 वर्ष बड़ा है। 15 वर्ष पूर्व विक्की की आयु रिक्की की आयु की दुगुनी थी। उनकी वर्तमान आयु कितनी हैं?

हल : इनमें रिक्की छोटा है।

अतः आइए हम रिक्की की वर्तमान आयु z वर्ष ले

विक्की की वर्तमान आयु $= (z + 5)$ वर्ष

15 वर्ष पूर्व विक्की की आयु थी $(z + 5 - 15)$ वर्ष $= (z - 10)$ वर्ष

उस समय रिक्की की आयु थी $(z - 15)$ वर्ष

दिये गए संबंध के अनुसार, विक्की की आयु रिक्की की आयु की दुगुनी थी।

अतः $z - 10 = 2\,(z - 15)$

$\Rightarrow \quad z - 10 = 2z - 30$

$\Rightarrow \quad z - 2z = -30 + 10$

$\Rightarrow \quad z = 20$

अतः रिक्की की वर्तमान आयु 20 वर्ष तथा विक्की की वर्तमान आयु $= (20+5)$ वर्ष $= 25$ वर्ष।

अपनी प्रगति की जांच के लिए निम्नलिखित को हल कीजिए :

E16 दो संख्याओं का योग 64 है। एक संख्या दूसरी से 14 अधिक है। संख्याएँ क्या क्या हैं?

E17 निम्नलिखित समस्याओं को हल कीजिए :

(a) सचिन धोनी से दुगुने रन बनाता है। उनके द्वारा बनाये गए कुल रनों की संख्या एक शतक से एक रन कम रही। उनमें से प्रत्येक ने कितने कितने रन बनाए?

(b) नरहरिपुर के लोगों ने ग्राम बाग में 102 पेड़ लगाए। फल न देने वाले पेड़ों की संख्या फल देने वाले पेड़ों की संख्या के तीन गुने से 2 अधिक थी। फल देने वाले लगाये गए पेड़ों की संख्या कितनी है?

(c) सानिया की आयु उसके पिता की आयु की आधी है तथा उसके पिता की आयु उसके दादा की आयु की आधी है। बीस वर्ष के पश्चात उसकी आयु उसके पिता की वर्तमान आयु के बराबर होगी। सानिया, उसके पिता तथा उसके दादा की वर्तमान आयु कितनी-कितनी हैं?

E18 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{2x+3}{3x+7}=\frac{5}{8}$$

9.7 सारांश

- बीजगणित सामान्यीकरण अंकगणित है जिसमें संख्याओं को निरुपित करने के लिए अक्षर प्रतीकों के रूप में प्रयुक्त किये जाते हैं। प्रत्येक संख्या एक अचर होती है तथा प्रत्येक प्रतीक को विभिन्न स्थितियों में भिन्न मान दिये जा सकते हैं।
- प्रतीकों और अचरों को प्रयुक्त करके बीजीय व्यंजक बनाए जाते हैं। हम व्यंजकों को बनाने के लिए प्रतीकों तथा अचरों पर चार मूल संक्रियाओं का प्रयोग भी करते हैं।
- पद किसी व्यंजक के भाग होते हैं जिन्हें '+' अथवा '–' चिन्हों द्वारा एक दूसरे से अलग किया गया होता है। यह एक अचर, एक चर अथवा दोनों का संयोजन हो सकता है।
- एक अथवा अधिक पदों, जिनके घाँताक पूर्ण संख्याएँ हों, वाले व्यंजकों को बहुपद कहा जाता है। विशेष रूप से ऐसे एक पद वाले व्यंजक को एकपदी दो पदों वाले को द्विपदी कहा जाता है तथा बहुपद की घात उस पद की घात के बराबर होती है जिसके पदों में से जिस पद की घात सबसे बड़ी होती है।
- किसी समीकरण के दो पक्ष एक तराजू के दो पलड़ों की तरह होते हैं।
- रैखिक समीकरणों को चार विधियों : परीक्षण (जांच) द्वारा, दोनों पक्षों में बराबर राशियों के योग अथवा व्यवकलन द्वारा, पक्षान्तरण द्वारा तथा वज्र गुणन (आर-पार की गुणा) द्वारा में से किसी एक को प्रयुक्त करके हल करते हैं।

9.8 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर

E1 $p + q, 2p - q, 3p + 2q - 1$ अथवा कोई तीन ऐसे व्यंजक

E2 (i) $5xy + 3$ (ii) $ab - (a + b)$

E3 चर : y तथा z, अचर : 2, 3, 5

E4 (i) -1 (ii) zy (ii) xy

E5 $\left(2p,\frac{p}{3}\right),(-3pq,5pq),\left(\frac{1}{2}pqr,3qr\right)$

E6 (i) xy का गुणांक = 5, 5 का गुणांक $= xy$, आदि

(ii) 3 का गुणांक $= -abc$, abc का गुणांक $= -3$, आदि

E7 (i) पद : $3xy, 5y$; $3xy$ के गुणनखंड : $3, x, y$; $5y$ के गुणन खंड : $5, y$

(ii) पद : $ab, 2a$ तथा $3y$

E8 $4x^2 - 4xy - 6y^2$

E9 $-m + 6n + 6$

E10 $2a^2 + 7ab + 3a - 5b - 5$

E11 (a) $6x^2 + 5x - 6$ (b) $p^3 - q^3$

E12 (i) $3a^2 + 4a + 5$

E13 (i) $x = 4$ (ii) $y = 7$ (iii) $x = 18$

E14 (i) $t = 3$ (ii) $p = 3$

E15 (i) $x = 2$ (ii) $x = 11$

E16 25 तथा 39

E17 (a) धोनी : 33, सचिन : 66 (b) 25 (c) 20, 40, 80

E18 $x = 11$

9.9 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

- बन्सल, आर.के. (2007), Middle School Mathematics नई दिल्ली : सेलिना प्रकाशन
- NCTM (1999). *Activities for Junior High School and Middle School Mathematics, Vol.2*, The National Council of Teachers of Mathematics(NCTM), INC, USA.
- Teaching of Maths at Upper Primary Level, Vol.- II Published by DEP-SSA, IGNOU, New Delhi
- रा.शै.अ.प्र.प. (NCERT) नई दिल्ली द्वारा प्रकाशित कक्षा VI, VII तथा VIII के लिए पाठ्य पुस्तकें

9.10 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1. निम्नलिखित के लिए व्यंजक लिखिए :

   (i) संख्याओं p तथा q के योग का एक तिहाई

टिप्पणी

(ii) संख्याओं a तथा b के गुणनफल से उनके योग को घटाया गया।

(iii) x तथा y के गुणनफल के दुगुने में 8 जोड़ा गया।

2. गुणांक ज्ञात कीजिए :

(i) $-5xyz$ में xy का (ii) $z\,m^2n^2$ में m^2 का (iii) $-qpqr$ में 9 का

3. निम्नलिखित में संख्यात्मक गुणांक की पहचान कीजिए :

(i) $-t$ (ii) $\frac{2}{3}pq$ (iii) $-8x^2y^2$

4. प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिए :

(i) एकपदी (ii) द्विपदी (iii) त्रिपदी

5. अलग समूहों में सजातीय पदों को एक साथ लिखिए :

(i) $ab^2, -4ab, 2a^2b, ab, -3ab^2, \frac{2}{3}ab, -5a^2b, a^2b^2$

(ii) $2x, -5xy, -x, \frac{xy}{2}, 3y$

6. निम्नलिखित व्यंजकों का योग कीजिए :

(i) $a + b - 5,\ b - a + 3$ तथा $a - b + 6$

(ii) $4x + 3y,\ -7xy,\ 3xy - 2x$ तथा $2xy - y$

(iii) $m^2 - n^2 - 1,\ n^2 - 1 - m^2$ तथा $1 - m^2 - n^2$

7. घटाइए :

(i) $y(3 - x)$ से $x(y - 3)$

(ii) $5m - 10$ से $m^2 + 10m - 5$

(iii) $2ab - 3a^2 - 3b^2$ से $5a^2 - 7ab + 5b^2$

8. व्यंजक को सरल कीजिए :

(i) $10x^2 - 8x + 5 + 5x - 4x^2 - 6x - 10$

(ii) $20mn - 10n - 17m - 12n + 14m + 2$

9. गुणा कीजिए :

(i) $(a - b)$ को $(a^2 + ab + b^2)$ से

(ii) $(p + q - 5)$ को $(p - q)$ से

10. भाग दीजिए :

(i) $(8m^2 + 4m - 60)$ को $(2m-5)$ से

(ii) $(6a^2b^2 - 7abc - 3b^2)$ को $(3ab + c)$ से

11. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $2y - 5 = 9$ (ii) $\frac{3}{5} + x = \frac{13}{5}$

(iii) $\frac{z}{3} + \frac{z}{5} = 40$ (iv) $\frac{8x}{6+3x} = \frac{-4}{3}$

12. निम्नलिखित समस्याओं को हल कीजिए :

(i) किसी आयताकार भूखंड की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 5मी. अधिक है। भूखंड का परिमाप 70मी. है। भूखंड की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(ii) किसी समद्विबाहु त्रिभुज में आधार के कोण बराबर है। शीर्ष कोण प्रत्येक आधार के कोण से 150^o अधिक है। त्रिभुज के कोणों की माप ज्ञात कीजिए।