

प्रारंभिक शिक्षा में डिप्लोमा
(डी.एल.एड.)

पाठ्यक्रम-504
प्राथमिक स्तर पर गणित सीखना

ब्लॉक-1

विद्यालय के प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने का महत्व



राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

A 24/25, सांस्थानिक क्षेत्र, सैक्टर-62 नौएडा,

गौतम बुद्ध नगर उत्तर प्रदेश-201309

वैबसाइट : www.nios.ac.in

श्रेय अंक (4=3+1)

ब्लॉक	इकाई	इकाई का नाम	सैद्धान्तिक अध्ययन घंटे		प्रयोगात्मक अध्ययन
			पठ्य-वस्तु	क्रियाकलाप	
ब्लॉक-1 विद्यालय के प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने का महत्व	इकाई 1	बच्चे गणित कैसे सीखते हैं	3	2	गणित सबके लिए, गणितीयमय पर सेमिनार
	इकाई 2	गणित एवं गणितीय शिक्षा: महत्व, क्षेत्र एवं सार्थकता	4	2	-
	इकाई 3	गणित शिक्षा के उद्देश्य एवं परिप्रेक्ष्य	4	3	कक्षा के बाहर गणित, अपनी कक्षा में गणित शिक्षा से संबंधित समस्याओं की पहचान
	इकाई 4	अधिगमकर्ता एवं अधिगम केन्द्रित विधियाँ	5	3	अपने विद्यालय में गणित क्लब का प्रबंधन
खण्ड-2 गणितीय प्रत्ययों एवं विधियों का संवर्धन	इकाई 5	संख्याएं एवं संख्याओं पर सक्रियाएं	5	2	-
	इकाई 6	आकृतियाँ एवं स्थानिक संबंध	5	2	-
	इकाई 7	मापें एवं मापन	4	2	-
	इकाई 8	आँकड़ों का प्रबन्धन	4	3	आँकड़ों का सांख्यिकीय विश्लेषण
	इकाई 9	सामान्यीकृत अंकगणित के रूप में बीजगणित	4	2	-
ब्लॉक-3 गणित में अधिगमकर्ता का आकलन	इकाई 10	गणित अधिगम के आकलन के उपागम	3	2	गणित में प्रत्यय निर्माण की तैयारी एवं पाठ योजनाओं का विकास
	इकाई 11	आकलन के साधन एवं प्रविधियाँ	4	3	गणित प्रयोगशाला के लिए प्रदर्शनियों का विकास
	इकाई 12	गणित अधिगम के आकलन हेतु फोलोअप	3	2	गणित अधिगम में समस्याओं की पहचान एवं उपचार
		शिक्षण	15		
		योग	63	27	30
		कुल योग = 63 + 27 + 30 = 120 घण्टे			

ब्लॉक-1

विद्यालय के प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने का महत्व

इकाई 1 : बच्चे गणित कैसे सीखते हैं

इकाई 2 : गणित एक गणितीय शिक्षा: महत्व, क्षेत्र एवं सार्थकता

इकाई 3 : गणित शिक्षा के उद्देश्य एवं परिप्रेक्ष्य

इकाई 4 : अधिगमकर्ता एवं अधिगम केन्द्रित विधियाँ

खंड प्रस्तावना

आप शिक्षार्थी के रूप में ब्लाक 1 : विद्यालय के प्रारम्भिक स्तर पर गणित सीखने का महत्व का अध्ययन करेंगे। इस ब्लाक में प्रारम्भिक स्तर पर गणित सीखने के महत्व से संबंधित चार इकाईयां हैं। प्रत्येक इकाई विभिन्न खण्डों एवं उपखण्डों में विभाजित है।

इकाई-1

यह इकाई आपको, बच्चों वास्तविक रूप से गणित किस प्रकार सीखते हैं, को समझने में सक्षम बनायेगी। इस इकाई से आप सीखेंगे कि बच्चा किस प्रकार सोचता है एवं बच्चों के ज्ञानात्मक विकास के स्तर क्या है? गणितीय अवधारणों के विकास एवं चिंतन के विकास के मध्य गहरा संबंध होता है। अध्यापक के रूप में प्रत्येक को विद्यार्थियों में व्याप्त गणित संबंधी भय को आनंददायी बनाना, सीखना चाहिए।

इकाई-2

यह इकाई आपको अध्यापकों द्वारा विद्यार्थियों के लिए तैयार की गयी गणित शिक्षा पर आधारित गणित की प्रकृति को समझने में सक्षम बनायेगी। गणित जीवन की वास्तविक परिस्थितियों में किस प्रकार मदद करता है एवं किस प्रकार समस्या समाधान संबंधी दृष्टिकोण का विकास होता है, इन संदर्भों में भी गणित शिक्षण के महत्व की आवश्यकता है।

इकाई-3

आप इस इकाई द्वारा गणित शिक्षण के उद्देश्यों से भलीभांति परिचित हो सकेंगे। गणित शिक्षण के महत्वपूर्ण पहलू कक्षा के बाहर गणित शिक्षण एवं गणित शिक्षण को आनंददायी बनाने से भी परिचित हो सकेंगे ताकि विद्यार्थियों में गणित संबंधी व्याप्त भय को आसानी से दूर किया जा सके।

इकाई-4

यह इकाई आपको गणित शिक्षण एवं अधिगम की विभिन्न विधियों जैसे आगमन एवं निगमन विधि, विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि परियोजना विधि और समस्या-समाधान विधि इत्यादि को समझने में सक्षम बनायेगी। गणित शिक्षण एवं अधिगम में सूत्रों को याद करना एवं रटना, छात्रों में गणित संबंधी अवधारणाओं को समझना कठिन बनाने के साथ विद्यार्थियों में गणित संबंधी भय को बढ़ावा देता है जो छात्रों में भविष्य में गणित संबंधी अन्य अवधारणाओं को सीखने में बाधक होता है, अतः गणित शिक्षण में विद्यार्थी केंद्रित उपागमों जैसे गतिविधि आधारित शिक्षण इत्यादि के प्रयोग करने की आवश्यकता है। ये उपागम शिक्षार्थियों में सृजनात्मक योग्यताओं के विकास में सहायता करते हैं एवं गणित पुस्तकालय एवं प्रयोगशाला के सही उपयोग करने के लिए दिशा प्रदान करते हैं। रचनावाद एवं प्रयोगात्मक उपागम गणित सीखने की दिशा में कुछ नये आयाम हैं।

आप शिक्षार्थी के रूप में ब्लाक 2 विषय वस्तु संवर्द्धन एवं विधियां का अध्ययन करेंगे। इस ब्लाक में विषय वस्तु संवर्द्धन एवं विधियां से संबंधित पांच इकाईयां हैं। प्रत्येक इकाई खण्डों एवं उपखण्डों में विभाजित है। आप प्रारम्भिक स्तर पर गणित शिक्षण का महत्व, बच्चा गणित किस प्रकार सीखता है? एवं गणित शिक्षण को ओर अधिक आनंददायी किस प्रकार बनाया जा सकता है, इत्यादि ब्लाक 1 में पहले ही पढ़ चुके हैं।

विषय सूची

क्रम. सं.	पाठ का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	इकाई 1 : बच्चे गणित कैसे सीखते हैं	1
2.	इकाई 2 : गणित एक गणितीय शिक्षा: महत्व, क्षेत्र एवं सार्थकता	27
3.	इकाई 3 : गणित शिक्षा के उद्देश्य एवं परिप्रेक्ष्य	45
4.	इकाई 4 : प्रारम्भिक स्तर पर अधिगमकर्ता एवं अधिगम केन्द्रित विधियाँ	66



इकाई-1 बच्चे गणित कैसे सीखते हैं

संरचना

- 1.0 परिचय
- 1.1 अधिगम उद्देश्य
- 1.2 बच्चे के सोचने का तरीका
 - 1.2.1 संज्ञानात्मक विकास की अवस्थाएं
 - 1.2.2 गणितीय अवधारणा का विकास
- 1.3 पूर्व-बाल्यावस्था के दौरान गणित अधिगम
 - 1.3.1 गणित अधिगम के तरीके
 - 1.3.2 गणित का भय
 - 1.3.3 गणित अधिगम को आनंददायक बनाना
- 1.4 सारांश
- 1.5 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर
- 1.6 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें
- 1.7 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1.0 परिचय

विद्यालय के सभी विषयों में सबसे अधिक ध्यान गणित अधिगम पर दिया जाता है। अपने विद्यार्थी काल के दौरान और अब शिक्षक के रूप में, आपने अनुभव किया होगा कि बच्चों के ऊपर अन्य विषयों की अपेक्षा गणित में अच्छा प्रदर्शन करने का अधिक दबाव होता है। यहां तक कि माता-पिता उनके शैक्षिक स्तर का विचार किये बिना गणित में अच्छा प्रदर्शन करने के लिए अपने बच्चों पर बहुत अधिक मेहनत करने का दबाव बनाते हैं और शायद अन्य विषयों की अपेक्षा घर पर ज्यादा समय गणित के अध्ययन में ही व्यतीत होता है। लगभग सभी स्थितियों में गणित अधिगम में बच्चे की दशा पर शायद ही विचार किया जाता है यह एक सामान्य विश्वास है कि बच्चा एक छोटा वयस्क है, वह या तो समझ को विकसित करके या रटने के द्वारा ही गणितीय कौशलों को प्रभावपूर्ण ढंग से ग्रहण कर सकता है। ऐसी धारणाओं के अनुसार, माता-पिता और अध्यापक बच्चों से गणितीय अवधारणाओं, तथ्यों और सारणियों को रट कर याद करने के लिए आग्रह करते हैं और परिणाम यह होता है कि अधिकांश बच्चे बिना वास्तविक प्रक्रिया और सिद्धांतों को समझे यांत्रिक रूप से याद करते हैं जो उनके विद्यालय अधिगम के शुरू से ही गणित के प्रति भय उत्पन्न करता है। यह भय गंभीर होता चला जाता है तथा जीवन भर के लिए गणित के प्रति भय बना रहता है। आपने यह अनुभव किया होगा



टिप्पणी

कि विभिन्न स्तरों, विशेष रूप से प्राथमिक स्तर पर गणितीय अवधारणाएं और प्रक्रियाएं, सरल से कठिन की ओर होती हैं। क्या आपने कभी सोचा कि ऐसी व्यवस्था बच्चे के वृद्धि और विकास के लिए कुछ कर सकती है, विशेष रूप से तब, जब ये उनके सोचने की योग्यता से संबंधित होती हैं? खोज से यह साबित हुआ है कि सोचने में बुद्धि और गणितीय अवधारणाओं के विकास के बीच गहरा संबंध है। एक अध्यापक होने के नाते आपको ऐसे संबंधों के बारे में जागरूक होना चाहिए जिससे कि आप अपनी कक्षा में गणित अवधारणा के अधिगम में प्रत्येक बच्चे की योग्यता की समझ को विकसित कर सकें एवं उनकी कठिनाई को सरल कर सकें और इस दिशा में सटीक निर्णय ले सकें।

जब बच्चों की आवश्यकता और रुचि को सही ढंग से नहीं समझा जाता है— और उन्हें साधन उपलब्ध नहीं कराये जाते हैं, दूसरी ओर उनपर पाठ्यपुस्तक के अनुरूप गणित सीखने के लिए दबाव बनाया जाता है, इस प्रकार का गणित अधिगम बोझिल और समस्यात्मक बन जाता है। ऐसा बच्चों के बहुत बड़ी संख्या में अनुभव किया गया है। वे गणित में अपने प्रदर्शन को लेकर चिंतित हो जाते हैं जो आगे चलकर गणित के प्रति भय में बदल जाता है। अधिकांश स्थिति में इससे छुटकारा पाना कठिन होता है। यदि एक अध्यापक के रूप में हमारा परिदृश्य स्पष्ट है कि बच्चे मनोरंजन पूर्ण ढंग से कैसे सीख सकते हैं तो हम उनके विद्यालय अधिगम के शुरुआती दिनों से ही गणित अधिगम के लिए समुचित साधन उपलब्ध कराने के योग्य हो सकते हैं।

इस कोर्स की प्रथम इकाई गणित अधिगम में हमने बच्चे के संज्ञानात्मक विकास के अनुसार गणित अवधारणा के विकास के अध्ययन के द्वारा गणित अधिगम के उन तरीकों पर चर्चा करने का प्रयास किया है जिन्हें बच्चे पसंद करें। हमने गणित अधिगम में बच्चों की ऐसी समस्याओं को खोजने की कोशिश की है जो उनमें गणित के प्रतिभय को दूर करती हैं और ऐसे तरीके खोजने की कोशिश की है जो गणित अधिगम में उन्हें आनंददायक अनुभव प्रदान करें।

इस इकाई को पूर्ण करने के लिए आपको अध्ययन के लगभग 6 कालांशों की आवश्यकता होगी।

1.1. अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि—

- पूर्व बाल्यावस्था के दौरान गणित अधिगम की अवधारणा के विकासात्मक प्रचलन की पहचान कर सकेंगे।
- विकास की विभिन्न अवस्थाओं में गणित अधिगम में बच्चों के साधन उपलब्ध कराने के तरीकों की खोजकर सकेंगे।



- अधिगम के प्रारंभिक स्तर में बच्चों द्वारा गणित अधिगम के दौरान आयी कठिनाइयों को सुनिश्चित कर सकेंगे और इन कठिनाइयों को दूर कर गणित अधिगम को आनंददायक बनाने की विधियों का उपाय खोजेंगे।

1.2 एक बच्चे के सोचने के तरीके

आपके परिवार में, विद्यालय में, बाजार में, सड़क पर या आपके चारों ओर कहीं भी, अनेक बच्चे प्रतिदिन आपके संपर्क में आते हैं। आप प्रतिदिन अनगिनत अवसरों पर उन बच्चों से परस्पर क्रिया करते हैं। आपकी एक बच्चे से परस्पर क्रिया में, आप उस बच्चे के बारे में क्या महसूस करते हैं, उसके सोचने का तरीका या उसके सीखने का तरीका? सोचने एवं अधिगम के तरीकों के विचार से, क्या वह किसी अन्य वयस्क की भांति है? क्या आप सोचते हैं कि जब वह विद्यालय में होता है, तो बच्चा सोचना एवं अधिगम करना शुरू करता है? यहां पर बच्चे और उसके सोचने के तरीकों के बारे में कुछ मान्यताएँ इस प्रकार हैं:

“एक बच्चे का मस्तिष्क एक साफ स्लेट की तरह होता है जिस पर लिखा जाना है।”

“एक बच्चे के मस्तिष्क में पूर्ण रूप से अंधेरा होता है जिसको ज्ञान के द्वारा प्रकाशित किया जाना है।”

“एक बच्चा गीली मिट्टी की तरह होता है जिसको इच्छानुसार आकृति दी जा सकती है।”

“एक बच्चा एक हरे पौधे की तरह होता है, जिसका पालन-पोषण (भोजन, पानी) करना चाहिए।”

“एक बच्चे का मस्तिष्क एक खाली बर्तन की तरह होता है जिसको ज्ञान के द्वारा भरा जाता है।”

इनमें से कौन से तथ्य को आप बच्चे के मस्तिष्क की व्याख्या के लिए सटीक मानते हैं? किसी भी व्यक्ति की मस्तिष्क में किस प्रकार की सोच है यह जानना बहुत कठिन है चाहे व्यक्ति की आयु कुछ भी हो। शिक्षण-अधिगम के दृष्टिकोण से हमें इस बात में दिलचस्पी है कि बच्चा अपना दिमाग किस प्रकार से इस्तेमाल करता है या विशिष्ट रूप से कहे तो वह कैसे सोचता है? बच्चे के दिमाग में क्या है यह गौण है।

सोचने का आधार अवबोधन है और अवबोधन पर्यावरण में किसी वस्तु के साथ, अवलोकन, अनुभव और परस्पर क्रिया के द्वारा आती है। छोटे बच्चे की प्रथम परस्पर क्रिया उसके पर्यावरण में पूर्ण रूप से उसकी ज्ञानेंद्रियों के अनुभव पर आधारित होती है।

अधिकांशतः देखकर, छूकर और कभी-कभी सुनकर और स्वाद लेकर। बहुत से मनोविज्ञानी, जिनमें पियाजे और बर्नर मुख्य हैं, यह विश्वास करते हैं कि किसी स्थूल वस्तु की हस्त कौशल



टिप्पणी

के द्वारा उत्पन्न समझ ही व्यक्ति के ज्ञान और सोच के आधार का निर्माण करती है। प्रमुख स्विस् बाल मनोविज्ञानी, पियाजे, सुझाव देते हैं कि बच्चे के सोचने की शुरुआत दो प्रक्रियाओं: 'अवबोधन' (किसी वस्तु के प्रत्यक्ष सम्पर्क में आने के परिणाम स्वरूप प्राप्त ज्ञान) और 'निरूपण' (समझी गयी वस्तु की मानसिक कल्पना)। वास्तव में, निरूपण को एक आकृति प्रदान करने के लिए, भाषा की महत्वपूर्ण भूमिका है।

एक शिक्षक के रूप में हमें अपने मस्तिष्क में अवबोधन के कुछ सिद्धांतों को रखना होगा ताकि बिना किसी बाधा के बच्चों की सोचने की प्रक्रिया के लिए साधन उपलब्ध किया जा सके। कुछ महत्वपूर्ण सिद्धांत निम्नलिखित हैं जो एडलबर्ट एम्स जूनियर-1938 के अध्ययन के द्वारा उदगमित हुए हैं और इस समय भी हमारा ध्यान अपनी ओर आकर्षित कर रहे हैं—

हम अपने चारों ओर की वस्तुओं से बोध को प्राप्त नहीं कर पाते हैं। हमारी समझ/बोध का विकास हमारे भीतर से होता है। यह वस्तु के महत्व को कम नहीं करता लेकिन उस तरीके को उजागर करता है कि अवलोकनकर्ता किस प्रकार से वस्तु को अनुभूत करता है। संख्यायें बहुतों के लिए दिलचस्प हैं परन्तु अधिकांश लोगों के लिए बहुत भयावह चीज हैं। इसमें बच्चे और वयस्क दोनों शामिल हैं। हम क्या प्राप्त करते हैं, यह हमारे पूर्व के अनुभवों, हमारी धारणाएं और हमारे उद्देश्य एवं आवश्यकताओं पर निर्भर करता है।

- हम अपने अवबोधन को शायद ही बदले जब तक कि हम उन पर आधारित कुछ कार्य से निराश न हो जायें। मान लीजिए यदि एक बच्ची अपनी माता को आटे के दो गोलों को मिलाकर एक गोला बनाकर उससे रोटी बनाते हुए अवलोकन करती है, वह उसे योग के $1+1 = 2$ के अनुसार प्राप्त करने की कोशिश करती है। वह अपनी समझ को तब तक नहीं बदलती जब तक कि वह एक ठोस वस्तु को दूसरी ठोस वस्तु के साथ योग नहीं करती।
- चूंकि हमारा अवबोधन हमारे भीतर से और हमारे पूर्व के अनुभवों से आता है इसलिए यह स्पष्ट है कि प्रत्येक व्यक्ति एक ही वस्तु को एक विशिष्ट तरीके से अनुभव करेगा। संप्रेषण केवल वहीं तक संभव है जब कि दो अनुभवकर्ताओं के उद्देश्य, धारणाएं और अनुभव समान हों।
- अवबोधन का अर्थ है कि यह किस प्रकार हमें कार्य करने के लिए प्रेरित करता है। जब बारिश होती है, कुछ लोग छत की ओर भागते हैं और कुछ लोग बारिश में नाचकर आनंद लेते हैं। घटित हो रहे घटना के बारे में उनकी अवबोधन भिन्न है जो उनके व्यवहार में प्रतिबिंबित हो रहा है।
- निरूपण किसी वस्तु की छवि को बनाने की प्रक्रिया है जबकि वस्तु प्रत्यक्ष अवलोकन के क्षेत्र में नहीं है। इस स्थिति में बच्चा अपनी भाषा में अपने मस्तिष्क के अनुसार उस वस्तु की व्याख्या करने की कोशिश करता है। इसलिए भाषा को विचारों का वाहन कहा जाता है।



क्रियाकलाप-1

किसी एक वस्तु (जैसे पेंसिल) का नाम दीजिए। और बच्चों से पूछिए कि इसका नाम सुनते ही तुरंत उनके मस्तिष्क में क्या आया? (प्रत्येक से एक कारण जानिए) बच्चों की प्रतिक्रिया को नोट कीजिए और बच्चों द्वारा दिये गये विविधता युक्त संकेतार्थों का अवलोकन कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

पियाजे ने जानने या संज्ञानात्मक प्रक्रिया की संरचना की अवधारणा प्रस्तुत की जिसमें उसने अनेक व्यक्तियों की सभी स्थितियों में विभिन्नताओं पर विचार किया है। उसने यह नियत किया कि प्रत्येक बच्चा एक मानसिक संरचना रखता है। वह सक्रिय हो जाता है जब वह किसी वस्तु, प्रक्रिया या घटना के संपर्क में आता है। बच्चा एक साथ दो प्रक्रियाओं-आत्मसात्करण (अपनी मानसिक संरचना के द्वारा, प्राप्त की गयी वस्तु, प्रक्रिया या घटना की व्याख्या करना) और समायोजन (किसी वस्तु, घटना या प्रक्रिया की व्याख्या की विद्यमान संरचना को रूपांतरित करना) के बीच संतुलन करता है। जब वह अनुभूत वस्तु को आत्मसात करने की कोशिश कर रहा होता है तब वह अनुकूलन (अपेक्षाकृत स्थायी संरचना) कहलाता है। समायोजन और आत्मसात्करण के बीच संतुलन को पहचानने की प्रक्रिया को साम्यीकरण कहते हैं जो पियाजे के संज्ञानात्मक विकास में बहुत महत्वपूर्ण है। यद्यपि प्रत्येक व्यक्ति की सोच की प्रक्रिया संगठनात्मक व अनुकूलनात्मकता की अपरिवर्तनीय प्रक्रिया का अनुकरण आत्मसात्करण और समायोजन के साम्यन के रूप में करता है। फिर भी प्रत्येक का अपना सोचने का एक विशिष्ट तरीका है। ऐसा इसलिए है क्योंकि व्यक्तियों के अवबोधन व निरूपण में, उनके समायोजन व आत्मसात्करण के साम्यन के द्वारा अनुभवों के प्रसंस्करण के तरीकों में, और अंत में, अपनाये गये सोच के व्यवस्थीकरण में अंतर होता है। प्रत्येक प्रक्रिया में और सोचने की प्रत्येक अवस्था पर प्रत्येक बच्चे का अपना एक विशिष्ट तरीका होता है।

आओ, पियाजे द्वारा वर्णित बच्चों के संज्ञानात्मक विकास की अवस्थाओं का संक्षेप में उल्लेख करते हैं जिसको अब सार्वजनिक रूप से स्वीकार कर लिया गया है। यह हमें एक बच्चे के विकास, उसकी सोच जैसे-जैसे वह बढ़ता है, की जानकारी प्रदान करती है। यह हमारे गणित-शिक्षण में विशेष रूप से रुचिकर होगा क्योंकि पियाजे ने गणितीय अवधारणा में अधिक प्रयोग करके इन स्तरों को विस्तारित किया है।



टिप्पणी

E-1 सोच को विकसित करने की दो मूलभूत प्रक्रियाएं क्या हैं? उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

E-2 ऐसी कौन सी दो विधियां हैं जिनके बीच संतुलन, सोचने की मूल क्रियाओं को स्थापित करता है?

1.2.1 संज्ञानात्मक विकास की अवस्थाएं

बच्चों के सोचने का तरीका वयस्क के सोचने के तरीके से ही केवल अलग नहीं होता है परन्तु आपने अनुभव किया होगा कि अलग-अलग आयु वर्ग के बच्चे भी सोचने के विभिन्न रूपों का प्रदर्शन करते हैं। प्याजे (Piaget) ने बच्चों में ज्ञानात्मक विकास का स्तर सिद्धांत को विकसित करते समय सटीकता से इसका अवलोकन किया है। प्याजे ने अपने तीन बच्चों का उनके जन्म से ही बहुत बारीकी से अवलोकन किया और उनके क्रियाओं को (विशिष्ट रूप से संक्रियाएं) कुछ समानताओं के आधार पर समूह बनाया, और फिर स्तर या विशेषकाल की क्रियाओं के प्रतिमानों का निर्माण किया तथा यह प्रदर्शित किया कि बच्चे सोचने या संज्ञान के विकास में कुछ विस्तृत स्तरों या कालों का अनुसरण करते हैं।

तदनुसार प्याजे ने संज्ञानात्मक विकास के स्तरों या कालों का वर्गीकरण निम्न प्रकार से किया है।

- संवेदी क्रियात्मक काल – (जन्म से 2 वर्ष तक)
- पूर्व-संक्रिया काल (2 से 7 वर्ष)
- मूर्त संक्रिया काल (7 से 11 वर्ष) और
- औपचारिक संक्रिया (11-12 वर्ष से 14-15 वर्ष)

संवेदी क्रियात्मक काल : पहला स्तर, जन्म से डेढ़ वर्ष या 2 वर्ष, पूर्व-मौखिक, पूर्व-प्रतीकात्मक काल है इस काल की विशेषतायें हैं बच्चों की प्रत्यक्ष क्रियायें जैसे चूसना, देखना, पकड़ना आदि जो पहले असमायोजित होते हैं परन्तु बाद में धीरे-धीरे समायोजित बन जाती हैं। इसमें क्षणिक गति और प्रतिक्रियात्मक से प्राप्त आदतों और इनसे बौद्धिक क्रियाकलापों की ओर उत्तरोत्तर वृद्धि होती है। उदाहरण के लिए सबसे पहली क्रिया जो बच्चा प्रदर्शित करता है वह है अंगूठा चूसना जो कि प्रतिक्रियात्मक क्रिया नहीं है परन्तु यह एक आदत है जिसे बच्चा खोजता है और संतुष्टि प्राप्त करता है। यह आदत बच्चे के प्रतिक्रियात्मक क्रिया से निकलता है या बाहरी प्रतिबंधों के द्वारा बनता है। एक वर्ष की आयु पर बच्चे के व्यवहार में एक नया तत्व आ जाता है। वह अपनी क्रियाओं में एक उद्देश्य या इच्छा स्थापित कर सकता है। वह गलीचे पर कुछ दूरी पर रखी एक बॉल को पकड़ने के क्रम में, वह उस तक लेटकर पहुंचने की कोशिश करता है। वह बॉल को प्राप्त करने की विधि का विकास कर सकता है। वह गलीचे को खींचकर, बॉल को खींचने की कोशिश कर सकता है, इसलिए वह गलीचे को अपनी ओर खींचता है। ऐसी क्रिया किसी कार्य के पीछे की भावना को प्रदर्शित करती है और प्याजे इसे एक



बुद्धिमानी वाला कार्य समझता है। बच्चा कुछ उद्देश्य या साध्य के साथ सोचना शुरू करता है और उस साध्य को प्राप्त करने के लिए उचित साधन की तलाश करता है। आगे इस काल के अंत की ओर बच्चा घर पर बोले जाने वाली भाषा के एकाक्षर का इस्तेमाल करके बोलना शुरू कर देता है। यह प्रतीकात्मक क्रिया के शुरू होने का सूचक होता है, एक बुद्धिमत्ता का घटक है।

पूर्व-संक्रिया काल—यह काल $1\frac{1}{2}$ या 2 वर्ष से शुरू होकर 7 वर्ष की आयु तक चलता है। इसे विद्यालय के पूर्व की अवस्था भी माना जाता है। यह काल प्रतीकों के निरूपण की अवस्था के रूप में भी जाना जाता है। प्रतीकात्मक प्रकार्यों में भाषा, प्रतीकात्मक खेल, कल्पना का आविष्कार और विलंबित अनुकरण शामिल है। संवेदी क्रियात्मक काल के दौरान वस्तुओं और कल्पनाओं को निरूपित करने के लिए किसी शब्द या प्रतीक का उपयोग नहीं होता है लेकिन पूर्व-संक्रिया काल में बच्चा किसी वस्तु या क्रिया जैसे कोई खेल खेलना, में शब्दों का उपयोग करता है। प्रायः इस खेल में बच्चे अलग-अलग रूप धारण करते हैं, जो वास्तविक जीवन के चरित्र से संबंधित होते हैं और इन्हें वे प्रतीकात्मक रूप से बताते हैं। विलंबित अनुकरण में बच्चा स्वयं को ऐसी क्रियाकलापों में संलिप्त रखता है जिसमें ऐसे प्रतिरूपों के अनुकरण करने की आवश्यकता पड़ती है जो उनके सामने उपलब्ध नहीं होता है। ऐसे क्रियाकलाप खाना बनाना, खिलौने को कपड़े पहनाना आदि हैं और इसी प्रकार के अन्य क्रियाकलाप शामिल हैं। ऐसे क्रियाकलापों के द्वारा निरूपण करना संभव है। निरूपण करने का अर्थ है—विचारों का क्रियाओं में रूपांतरण करना। इस प्रकार से बाह्य क्रियाकलापों को आत्मसात करना जोकि विचार के कई आयामों को बढ़ाने में सहायता करता है।

पूर्व संक्रिया विचार काल प्रतिवर्ती संक्रियाओं और अवधारणा के संरक्षण से रहित होता है। चार से पांच वर्ष की आयु के बच्चे एक छोटे तथा चौड़े बोतल से द्रव पदार्थ को एक लम्बे तथा पतले बोतल में उड़ेल सकता है और यह सोचता है कि लम्बे-पतले बर्तन में ज्यादा द्रव पदार्थ है। इस प्रक्रिया के विपरीत क्रिया दिखाने के बाद भी वह संतुष्ट नहीं होता है कि द्रव पदार्थ की मात्रा समान है।

मूर्त संक्रिया काल—तीसरी अवस्था, लगभग सात से ग्यारह या बारह वर्ष की आयु मूर्त संक्रिया काल की होती है। यह आपके लिए विशेष महत्व रखता है क्योंकि प्राथमिक विद्यालय के अधिकांश बच्चे अधिकतर समय इस स्तर के विकास की अवस्था में होते हैं। यह स्तर गणितीय तार्किक सोच की प्रारम्भिक अवस्था है अतः गणित अधिगम के लिये ये महत्वपूर्ण है जिसके बारे में हम इस इकाई के उत्तरोत्तर भागों में विस्तृत चर्चा करेंगे। इस काल में बच्चे क्रिया का प्रदर्शन शुरू करते हैं जोकि उनके मूर्त, वस्तुओं का भौतिक रूप से हस्तकौशल के द्वारा तार्किक सोच की योग्यता की ओर इंगित करता है। बच्चा ज्ञानेंद्रिय संकेतों पर इस काल में निर्भर नहीं होता है। इस काल के दौरान बच्चा दो मुख्य संक्रियाओं का प्रदर्शन करता है ये क्रियाएँ—समूहीकरण और संरक्षण हैं जोकि गणितीय अवधारणाओं के विकास से जुड़ी हुई हैं। अगले भाग में चर्चा से यह स्पष्ट हो जायेगा।

औपचारिक संक्रिया काल—चौथी अवस्था, औपचारिक संक्रिया काल की है, जो कि 11 या 12 वर्ष की आयु तक घटित नहीं होती है। बच्चा उच्च प्राथमिक स्तर पर होता है तथा प्रतीकों



टिप्पणी

या विचारों का उपयोग करके तर्क करता है और अपनी सोच के लिए भौतिक वस्तुओं की जरूरत महसूस नहीं करता है। बच्चा नयी मानसिक संरचना प्राप्त कर चुका होता है। ये नई संरचनाएं—प्रतीकात्मक तर्क का प्रस्तावात्मक संयुक्तीकरण जैसे अभिप्रेतार्थ (यदि तब), वियोजन (दोनों में से एक या दोनों), अपवर्जन (कोई एक.... या) इसी तरह अन्य संरचनाएं शामिल हैं।

बच्चा अब अनुपातों से संबंधित परिकलन करना जानता है जो कि उसको छोटा या बड़ा मानचित्र बनाना, समय और दूरी से संबंधित समस्याएं हल करना, प्राथिकता और ज्यामितीय समस्याओं की हल करने में सहयोग करता है।

संक्षेप में सोच सा संज्ञान का विकास, अनुभव और संवेदी क्रियात्मक अनुभवों से आगे बढ़ता है। फिर मूर्त वस्तुओं का हस्त कौशल करके सोचने की प्रक्रिया से आगे बढ़कर काल्पनिक रूप से सोचने की ओर आगे बढ़ता है जिसमें अमूर्त वस्तुओं की अनुपस्थिति में अमूर्त पदों के द्वारा कई प्रकार के विचारों को संयुक्त करता है। संज्ञानात्मक विकास की समझ और विशेषताएं आपको अधिगम विधियों के विकास में सहायता करेगा तथा उचित विकास स्तरों में गणित अधिगम के लिए साधन उपलब्ध कराने में सहायता करता है।

12.2 गणितीय अवधारणाओं का विकास

गणितीय अवधारणाओं के तीन मूल समूह जो प्राथमिक कक्षाओं की गणित पाठ्यक्रम की सभी विषयवस्तु के लिए आवश्यक है वह है—संख्या व संख्याओं की सक्रियाएं, स्थानिक सोच और मापन। इन क्षेत्रों से संबंधित अवधारणाओं और प्राथमिक विद्यालय गणित के अन्य क्षेत्रों की इस कोर्स के ब्लॉक 2 में विस्तृत रूप से चर्चा की जायेगी। इस भाग में हम गणित के उन तीन क्षेत्रों से संबंधित कुछ चुने हुए अवधारणाओं के विकासात्मक पक्षों पर ध्यान देंगे जो आपको छोटे बच्चों को गणितीय अवधारणाओं को समझाने और सिखाने के लिए योजना बनाने के तरीकों के विकास करने में अंतर्दृष्टि उपलब्ध करायेगा।

संख्या अवधारणा का विकास : प्रायः गणन करने की प्रक्रिया को संख्या की अवधारणा से परिचय कराने का प्रथम चरण समझा जाता है और कक्षा प्रथम के अधिकतर बच्चे-संख्या नाम को जानते हैं और रटंत प्रक्रिया से कम से कम 10 तक गिन सकते हैं परन्तु संख्या अवधारणा का प्रभावकारी अधिगम के लिए बच्चों को कुछ प्रारंभिक अवधारणाओं को प्राप्त करने की आवश्यकता होती है उन्हें पूर्व-संख्या अवधारणा कहते हैं।

पूर्व-संख्या अवधारणायें : बच्चों में इन अवधारणाओं का विकास पूर्व-विद्यालय वर्षों में किया जा सकता है अर्थात् 7 वर्ष की आयु प्राप्त करने से पहले (मूर्त सक्रिया स्तर)।

मिलान : मिलान करने की प्रक्रिया एक-से-एक संगत की अवधारणा को समझने में सहायता करता है। जब बच्चा बिस्किट बांटता है तो कमरे में उपस्थित प्रत्येक बच्चा एक बिस्किट को प्राप्त करता है या हो सकता है बिस्किट की मात्रा अधिक हो।



मिलान की प्रक्रिया हमारे संख्या पद्धति का आधार है। जब बच्चा इसकी रचना कर सकता है तब समूहों का मिलान करना संभव हो जाता है। यह कठिन कार्यों के संरक्षण के लिए पूर्वापेक्षित कौशल बन जाता है। जब बच्चा प्रत्येक खिलौने के लिए एक चाकलेट रखता है और सुनिश्चिता पूर्वक यह अभिव्यक्ति कर सकता है कि उसके पास प्रत्येक खिलौने के लिए एक चाकलेट है या उसके पास उतने ही चाकलेट है जितने की उनके पास खिलौने हैं, तो उसने वस्तुओं के दो समूहों को सफलतापूर्वक मिलान कर लिया है।

छांटना : बच्चों को विभिन्न वस्तुओं की विशेषताओं को देखने की आवश्यकता है और उनके समान विशेषताओं को खोजना है। छोटे बच्चे रंगों के आधार पर वस्तुओं को छांटते हैं उसके पश्चात ही किसी और विशेषताओं पर ध्यान देते हैं।

तुलना करना : बच्चे वस्तुओं को देखकर उनकी तुलना उनकी भिन्नता जैसे बड़ा/छोटा ठंडा/गर्म, समतल/खुरदुरा, लम्बा/छोटा, भारी/हल्का को समझ कर करता है। इस प्रकार के तुलना के पदों का महत्व है। जब बच्चा दो या दो से अधिक राशियों के बीच संबंध ढूँढ़ने का प्रयास करता है तब अधिक/कम/समान तुलना को निर्धारण के लिए बच्चों को शुरू में मूर्त वस्तुओं के समूहों की रचना और तुलना करने की आवश्यकता है।

पूर्व विद्यालय स्तर पर बच्चों को अधिक, कम, समान की तुलना वस्तुओं को देखकर करना चाहिए।

क्रमबद्धता : क्रमबद्धता संख्या प्रणाली का मूलाधार है। बच्चों को वस्तुओं को क्रम से रखने के योग्य होना होगा ताकि उन्हें एक बार और केवल एक ही बार गिना जाये। वस्तुओं को क्रम में रखना संख्याओं की क्रमबद्धता के लिए पूर्वापेक्षित है। क्रमबद्धता वस्तुओं को आकार, लम्बाई या भार के द्वारा व्यवस्थित करना है। बच्चे को निर्देशित करते समय क्रम सूचक शब्दों (पहला, दूसरा, तीसरा) का इस्तेमाल करें।

Subitizing : बिना गणना किये एक संख्या के प्रतिरूप को तुरंत पहचानना subitizing कहलाता है। मात्रा को जाने बिना प्रतिरूप को पुनः संरचित किया जा सकता है। यह बच्चों को छोटे समूह को एक इकाई के रूप में देखने में सहायता करता है। यह संख्या के लिए प्रारंभिक बोधनीय आधार उपलब्ध कराता है परन्तु यह अभी संख्या ज्ञान नहीं है।

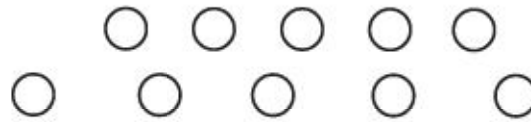
संख्या अवधारणा : गणना करना, संख्याक को सही ढंग से पहचानना और उपयोग करना, संख्याओं की तुलना करना और संख्याओं की संक्रियाओं को, संख्या अवधारणा के विकास में एक महत्वपूर्ण मील का पत्थर समझा जाता है।

गिनना : संख्याओं का सामान्य उपयोग गिनने में होता है। गिनने की प्रक्रिया में दो चरण सम्मिलित हैं—पहला एक विशेष वस्तुओं को एक संख्या आबंटित किया जाता है जो कि वस्तुओं के क्रम का हिस्सा बन जाता है और इसे संख्या का क्रमबद्ध पहलू कहा जाता है। दूसरा गिनने के अंतिम चरण में एकत्रित वस्तुओं की संख्या को जानना है अर्थात् गणन पक्ष को जानना। क्रमबद्धतात्मकता वस्तुओं के संग्रह में वस्तु के क्रम को (स्थिति क्या है?) संकेत करता है। जबकि गणनात्मकता वस्तुओं के संग्रह के आकार की (कितने वस्तु हैं) ओर संकेत करता है।



टिप्पणी

जब बच्चा दो संग्रहों के बीच एक-से-एक संगत विधि से मिलान करने के योग्य होता है और संख्या नाम का ज्ञान होता तब बच्चे में क्रमबद्धता की अवधारणा का विकास होता है। यह लगभग 3 से 5 वर्ष की आयु में शुरू होता है। संख्या 1 से 9 तक के नाम का ज्ञान लगभग 2 से 3 वर्ष की आयु तक में विकास हो जाता है और यह एक संख्यात्मक क्षमता के रूप नहीं होता है परन्तु भाषा विकास के दौरान शब्दों के रूप में सीखता है। इन शब्दों को (एक, दो, तीन, चार.... नौ) वस्तुओं के साथ जोड़ना संख्यात्मक कौशल के विकास की शुरुआत है। वस्तुओं और संख्या नाम के बीच एक-से-एक संगत मिलान एक क्रमिक रूप से स्थापित करना क्रमबद्धता की प्रक्रिया है। यद्यपि क्रमबद्धता वस्तुओं के संग्रह के आकार के ज्ञान को सुनिश्चित नहीं करता है। इसके दो कारण हैं- (i) 2 से 4 वर्ष का बच्चा, संख्या नाम के साथ मात्रा के मिलान का ज्ञान होना बाकी है और (ii) बच्चे में संख्याओं के संरक्षण का विकास नहीं होता है। उदाहरण के लिए पांच वर्ष से छोटा बच्चा कहेगा कि दूसरे लाइन में पहले लाइन की अपेक्षा अधिक वस्तु है। (आकृति 1.1) यहां पर बच्चा यह यही नहीं समझ पाता है कि वस्तुओं के संग्रह को जो जब एक लाइन में फैलाया जाता है तो उसके संख्या में परिवर्तन नहीं होता है। जब बच्चा को अचरता का बोध हो जाता है तब वह संख्याओं के संरक्षण की योग्यता प्राप्त कर लेता है यह लगभग 6 वर्ष के बच्चे में आता है।



आकृति 1.1

इसी प्रकार बच्चा लम्बाई, आयतन, क्षेत्रफल और द्रव्यमान का संरक्षण बाद के वर्षों में, मूर्त सक्रियता काल (7 से 11 या 12 वर्ष) में प्राप्त करता है। जब एक बार 4 या 5 वर्ष की आयु में संख्या का संरक्षण करना जाना जाता है तब वह वस्तुओं का संग्रह करके उसमें वस्तुओं की संख्या को गिन सकता है।

संख्यांक का इस्तेमाल : संख्यांक प्रतीक चिह्न है जिसे संख्या जैसे एक दो, तीन-को प्रदर्शित करने के लिए किया जाता है। इन्हें 1,2,3 के रूप में लिखते हैं। संख्या की अवधारणा को वस्तुओं के व्यवस्थीकरण के माध्यम से सीखा जाता है। अलग-अलग संख्या के लिए इस्तेमाल किये जाने वाले संख्यांक की संरचना से बच्चों को परिचय कराना चाहिए। संख्याओं के दशमलव पद्धति में जब बच्चा एक बार 0 से 9 तक के एक अंकीय संख्यांक से अच्छी तरह परिचित हो जाता है तब वह दूसरे संख्या के संख्यांक की रचना कर सकता है।

बच्चा 7 वर्ष की आयु तक संख्यांक को समझने और इस्तेमाल करने के लिए तैयार हो जाता है परन्तु 11 वर्ष की आयु में वह बड़ी संख्या को उसके संख्या के स्थानीय मान का उल्लेख करके लिख सकता है।

संख्या दस और उससे बड़े संख्या के लिए संख्यांक लिखते समय स्थानीय मान का ज्ञान होना आवश्यक है जिसका 1 से 8 वर्ष की आयु में विकास समूह में गिनने की प्रक्रिया के माध्यम



से होता है। इस कोर्स में इसकी विस्तृत चर्चा बाद में की गई है।

संख्याओं की संक्रियाएं : यह अवलोकन किया गया है कि जोड़ और इसके विपरीत घटाना को बच्चे बहुत प्रारंभिक वर्ष में कर लेते हैं। मूर्त वस्तुओं के साथ जोड़ या घटा की प्रक्रिया से वे बच्चे परिचित हैं जो कभी विद्यालय ही नहीं गये हैं। परन्तु संरचना और संक्रियाओं की सही समझ 9 से 11 वर्ष की आयु में होता है।

विकासात्मक दृष्टिकोण से बच्चा गुणा करना उसी समय सीखना प्रारंभ कर देता है जब वह जोड़ करना सीख रहा होता है परन्तु विद्यालय में गुणा के साथ भाग की प्रक्रिया को देर से कक्षा III में सीखाया जाता है अर्थात् बच्चे जब 9 वर्ष की आयु अर्जित कर लेते हैं। आगे प्राकृतिक संख्याओं में गुणन और भाग की संरचनात्मक विशेषताओं से मूर्त संक्रिया काल (लगभग 11 वर्ष की आयु) में बच्चों को परिचय कराया जाता है।

मापन अवधारणा का विकास : प्याजे के कार्य ने बच्चों में मापन की अवधारणा के विकास को समझने में एक महत्वपूर्ण योगदान दिया है। प्याजे ने दो विधियों की पहचान की अर्थात् संरक्षण और रूपांतरण जिसके ऊपर मापन की प्रक्रिया निर्भर है। हम इस इकाई में पहले ही संरक्षण के विचार की चर्चा कर चुके हैं।

रूपांतरण के विचार को एक उदाहरण के द्वारा अच्छी तरह से समझा जा सकता है। मान लीजिए एक बच्चे को जमीन का एक आयताकार प्लाट विद्यालय के बगीचे में दिखाया गया और कहा गया कि इसी प्लाट के आकार का (समान लम्बाई और चौड़ाई) एक और प्लाट तैयार करें। मान लीजिये दिये हुये प्लाट की लम्बाई A है। बच्चा मापक वर्ग के द्वारा लम्बाई को B मापता है, फिर उसके बाद बच्चा एक प्लाट काटता है जिसकी लम्बाई C था। यदि उसने लम्बाई के मापन की विधि को सही ढंग से क्रियान्वित किया है तो हमारे पास एक स्थिति है जहां पर वह प्रदर्शित कर रहा है कि उसे एक तथ्य की समझ है कि यदि $A=B$ और $B=C$ तो $A=C$ होगा अर्थात् उसके प्लाट की लम्बाई उतनी ही है जितनी कि दिये गये प्लाट की थी। मापन की कोई भी स्थिति हो मापन की एक उपकरण का अर्थपूर्ण ढंग से उपयोग अस्थायित्व के विचार के ऊपर निर्भर करता है।

मापन की अवधारणा के विकास से संबंधित अधिकांश अनुसंधान प्याजे के अध्ययन से निर्गमित हुए हैं और मुख्यतः विमीयवस्तुओं के मापन से (जैसे लम्बाई) संबंधित है।

शुरूआत में पूर्व विद्यालय में एक छोटा बच्चा (अर्थात् 6 वर्ष से छोटा) लम्बाई के संरक्षण की समझ को प्रदर्शित नहीं करता है। उसकी निर्णय करने की क्षमता केवल एक ही बोधनीय पहलू पर आधारित होती है। इस उम्र में बच्चा दो रेखाओं को असमान समझता है क्योंकि उनके सिरे एक सीध में नहीं थे। (आकृति 1.2)

आकृति 1.2



टिप्पणी

क्षेत्रफल और आयतन का निर्णयन प्रायः सबसे अधिक रेखीय आयाम (यह बड़ा है क्योंकि यह लम्बा है) पर आधारित होता है जिसको बच्चे ने दृश्यावलोकन करके अनुभूत किया है।

लगभग 6 से 7 वर्ष की आयु में बच्चा अमानक इकाई का उपयोग लम्बाई मापन के लिए करता है जैसे अपने हाथ या अपनी ऊंचाई का उपयोग लम्बाई मापन के लिए करता है।

बच्चा आयतन के संरक्षण की अवधारणा को लगभग 7 से 8 वर्ष की आयु में समझना शुरू कर देता है जब वह यह देखता है कि एक चौड़े पात्र से द्रव पदार्थ को एक लम्बे और पतले पात्र में उड़ेला जाता है तो उसकी मात्रा समान होती है।

लगभग 8 से 10 वर्ष की उम्र तक एक औसत बच्चा मापन की छोटी इकाई के द्वारा, मापन करने की वस्तु को पूरा ढककर मापन करने की प्रक्रिया को परख सकता है। इस आयु तक मापन का विकास जांच और त्रुटि उपागम द्वारा गुणयुक्त किया जाता है। बच्चा अब अधिक परिकलित उपागम के माध्यम से अग्रसर होने योग्य हो जाता है। यद्यपि एक वस्तु द्वारा घेरे गये स्थान के पदों में क्षेत्रफल और आयतन की माप विलंबित हो जाता है। बच्चा 10 और 11 वर्ष के आयु तक रेखीय आयामों (लम्बाई, चौड़ाई, ऊंचाई/मोटाई) की गणना के द्वारा क्षेत्रफल और आयतन की माप के विकास के अंतिम स्तर तक पहुंच जाता है।

विमीय (आकाशीय) सोच का विकास : बच्चा जिस स्थान या दुनिया में रहता है उसका पहला प्रभाव बहुत ही अव्यवस्थित होता है। न तो वह आकृतियों में अंतर स्पष्ट कर पाता है और न ही आकृतियों के छवि को लम्बे समय तक रख पाता है। जब बच्चा अस्पष्ट लिखाई स्तर को पार कर चुका होता है (लगभग $3\frac{1}{2}$ वर्ष की आयु) वह खुले और बंद आकृतियों के बीच में अंतर स्पष्ट कर सकता है। परन्तु सभी साधारण बंद आकृतियों जैसे वर्ग, वृत्त या त्रिभुज सभी उसके लिए एक ही समान हैं और वह उन्हें एक ही तरीके से आरेखित करता है।

लगभग 7 से 8 वर्ष की आयु में बच्चा समान आकारों जैसे वर्ग, आयत और समचतुर्भुज के मध्य अंतर को सही ढंग से पहचानने योग्य हो जाता है। परन्तु बच्चा जब 10 वर्ष की आयु का हो जाता है तब वह आकारों का सही नाम बताने योग्य हो जाता है और 11 या 12 वर्ष की आयु तक पहुंचने पर बच्चा 2D वस्तुओं को 3D वस्तुओं में प्रदर्शित करने पर उनके बीच के अंतर की पहचान कर सकता है।

विमीय सोच या स्थानिक सोच के विकास के कई जटिल पहलू हैं जो अधिकांश रूप से मूर्त संक्रिया काल के बाद के वर्षों में और औपचारिक संक्रियाकाल में उद्घाटित होता है।

E-3 वस्तुओं के वर्गीकरण के लिए कौन सी पूर्व-संख्या अवधारणा का इस्तेमाल किया जाता है?

E-4 संज्ञानात्मक विकास के चार स्तरों में से कौन से स्तर के विकास के दौरान अधिकांश गणितीय अवधारणाओं का विकास संभव है?

E-5 संज्ञानात्मक विकास के किस स्तर में अमूर्त गणितीय अवधारणाओं का विकास संभव है?

E-6 लम्बाई की संरक्षण से क्या तात्पर्य है?



1.3 प्रारम्भिक बाल्यावस्था के दौरान गणित अधिगम

गणितीय अवधारणाओं के विकास के बारे में उपरोक्त चर्चा से आपके पास बहुत से विचार, बच्चों के विकास के प्रारम्भिक स्तर पर और विद्यालय के प्रारम्भिक स्तर पर, गणितीय अवधारणा सीखने के अवसर उपलब्ध कराने के लिए हो सकते हैं। इस भाग में हम, गणित अधिगम के तरीकों, गणित के प्रति भय का रूप और उसका कारण तथा गणित अधिगम को अधिक आनंददायक बनाने के तरीकों को प्रस्तुत करने का प्रयास करेंगे।

13.1. गणित अधिगम के तरीके

गणित अधिगम के कोई एक और निश्चित तरीका नहीं होता है। यहाँ तक कि अधिगम के प्रारम्भिक अवस्था में भी नहीं है। इस इकाई में पूर्व में की गई चर्चा से आपने कुछ धारणाएँ विद्यालय के प्रारम्भिक दिनों में गणित अधिगम की प्रकृति के संबंध में बनाई होंगी। उनके अतिरिक्त यहाँ पर गणित अधिगम के प्रकृति के विशेषताओं से संबंधित कुछ बिंदु जैसा कि Whitebread (Anghileri 1995) ने सार प्रस्तुत किया है निम्नांकित हैं।

- बच्चे के स्कूल आने से पहले बच्चे की गणित अधिगम की स्थापना घर से प्रारंभ होती है।
- गणित समझ पर आधारित है।
- गणित बच्चों के स्वयं के विधि द्वारा परिकलन और समस्या समाधान करने के प्रयास को बढ़ावा देता है तथा पूर्व में मानक लिखित समस्या समाधान के चरणों के अभ्यास को नकारता है।
- गणित को दुनिया की व्याख्या करने के लिए एक शक्तिशाली उपकरण समझा जाता है इसलिए सभी पाठ्यक्रम का मूल वास्तविक अनुभव पर आधारित होना चाहिए।
- गणित बच्चे की प्रतिदिन की स्थितियों के अनुसार होना चाहिए।
- गणित तर्क के साथ कार्य करने और करके सीखना पर आधारित है।
- गणित पेपर पर संख्याओं के योग पर कम बल देता है तथा मानसिक चित्रण के विकास पर अधिक बल देता है।
- गणित के अवधारणा में सिद्धहस्त होने के लिए अध्यापक और बच्चे के लिए मुख्य उपकरण भाषा है न कि पाठ्यपुस्तक के अभ्यास की पेपर और पेन्सिल के द्वारा हल करना। बच्चे क्या कर रहे हैं यह बताने के लिए उन्हें उत्साहित किया जाता है।
- त्रुटियाँ गणित अधिगम प्रक्रिया का एक आवश्यक हिस्सा हैं। बच्चा जब आलोचना के भय से मुक्त हो जाता है तब वह आसानी से अधिक प्रयोग करेगा। पूर्ववर्ती चर्चा में हम ने विद्यालय के प्रारम्भिक स्तरों में गणित अधिगम के कुछ मूल तरीकों से संबंधित बातों पर ध्यान केंद्रित करने का प्रयास किया है। ये अधिगम के ऐसे तरीके हैं जिनका उपयोग आप कक्षा-कक्ष में गणित सिखाते समय कर सकते हैं।



टिप्पणी

वस्तुओं का व्यवस्थीकरण—जैसा कि आपने अवलोकन किया है कि मूर्त वस्तुओं के व्यवस्थीकरण के द्वारा बच्चा प्रारम्भिक स्तर पर गणितीय कौशलों को प्राप्त करता है। गणितीय कौशलों को जैसे तुलना करना, वर्गीकरण, गिनना, चार मूलभूत सक्रियायें प्राप्त करना, मूर्त वस्तुओं को व्यवस्थीकरण के बिना संभव नहीं है। आप बच्चों को परिचित वस्तुओं और नई वस्तुओं को देखने, अवलोकन करने और प्रयोग करने की स्वतंत्रता दें, इससे बच्चों को कक्षा में गणित की अवधारणा को सीखने और समझने में आसानी होगी।

- **अर्थ पूर्ण स्थितियों में कार्य करना** : वास्तविक स्थितियों में जहां गणित का वास्तव में उपयोग होता है बच्चे बहुत आसानी और शीघ्रता से अनौपचारिक और प्रभावकारी विधियों का विकास कर लेते हैं। समस्या वहां उत्पन्न होती है जब बच्चे विद्यालय में आते हैं और उन्हें पेपर और पेंसिल माध्यम से गणित के अमूर्त अवधारणा को सीखने-समझने के लिए कहा जाता है। इन कार्यों व बच्चों के सीखने के तरीकों के संबंध में जो अनुसंधान किये गये हैं उससे पता चलता है कि हमें वास्तविक समस्याओं से शुरूआत करके अमूर्त निरूपण की ओर बढ़ने की आवश्यकता है।

दैनिक जीवन की क्रियाकलापों में बच्चों को कई ऐसे अवसर मिलते हैं जिनमें गणित का समावेश होता है और ऐसे क्रियाकलापों में बच्चों को सम्मिलित करना चाहिए। खेल खेलना, मिठाई बांटकर खाना, कक्षाकक्ष में विभिन्न क्रियाकलापों को करने के लिए समूह बनाना, विद्यालय में अगले छुट्टी वाले दिन का पता लगाना आदि कुछ उदाहरण हैं।

छोटे बच्चों के साथ समस्यायें वास्तव में हो सकते हैं फिर भी ये काल्पनिक हो सकते हैं। काल्पनिक कहानियों और नाटकों के माध्यम से उत्पन्न समस्यायें बच्चों के लिए वास्तविक जीवन की समस्याओं से अधिक जीवंत हो सकते हैं। परियों की कहानियां, साहसी कहानियां, मनोरंजक कार्टून आदि ऐसी सामग्री है जो बच्चों के मन मस्तिष्क में कल्पना के द्वार खोलती है।

बच्चों को उनकी वास्तविक समस्याओं को प्रसंग के अनुसार हल करके उनको गणितीय योग्यताओं और समझशक्ति को विकसित करने के लिए उनकी सहायता की जा सकती है। यह महत्वपूर्ण है कि बच्चे ऐसे स्थितियों पर कम निर्भर हो। इस प्रकार की विधि या अवधारणा को अन्य अर्थपूर्ण स्थितियों में, बच्चों के सम्मुख प्रदर्शित करने की आवश्यकता है। इस प्रकार से आगमन के प्राकृतिक विधियों के द्वारा बच्चे प्रासंगिक से अप्रासंगिक को अलग करने के योग्य बनते हैं और अंततः अपने लिए विधि और अवधारणा के आवश्यक तत्व का सार निकालने के योग्य हो जाते हैं। इन सबके साथ हमें यह ध्यान में रखने की आवश्यकता है कि गणित की शक्ति अमूर्तता से प्राप्त होती है और बच्चों को विश्वासपूर्वक मूर्त अनुभवों से अमूर्तता का चित्रण करने के लिए हमें उनकी सहायता करने की आवश्यकता है।

विभिन्न तरीकों से निरूपण : एक और महत्वपूर्ण तत्व जिसमें बच्चों की सहायता करना आवश्यक है वह है बच्चों को गणित में अमूर्त सोच की ओर बढ़ने के लिए उनके निरूपण क्षमताओं के विकास में सहयोग देना। जैसाकि पहले ही वर्णन किया जा चुका है कि वस्तुओं, घटनाओं या विधियों को जैसा किसी व्यक्ति ने अनुभव किया है का मानसिक छवि बनाना ही



मानसिक निरूपण या केवल निरूपण कहलाता है। यह एक स्थापित तथ्य है कि बच्चों को गणितीय समस्याओं, विधियों और प्रक्रियाओं को अपने ढंग से निरूपण करने के लिए अवसर प्रदान करना चाहिए। उसके बाद ही उनका परंपरागत प्रतीकों से परिचय कराना चाहिए। यह स्पष्ट है कि यदि बच्चों को गणितीय समस्याओं को हल करने के योग्य और विश्वस्त बनना है तो उन्हें स्वयं को तथा अन्य को भाषा और गणितीय चिह्नों के माध्यम से गणित का निरूपण करने के योग्य बनाना होगा। कई गणित शिक्षाविद यह विश्वास करते हैं कि “यह महत्वपूर्ण है कि बच्चे अपने गणितीय सोच को भाषा के माध्यम से बातचीत करके अभिव्यक्त करें उसके बाद ही पेपर और पेंसिल पर अपने सोच का निरूपण करें और गणितीय चिह्नों का उपयोग करें। James (1985) ने Bruner तथा अन्य के ‘भाषा और विचार के बीच के संबंधों पर कार्य की समीक्षा करते समय एक गणित प्रक्रिया का विचार प्रस्तुत किया जिसे उन्होंने “करो, बात करो, और रिकार्ड करो” का नाम दिया। इसमें बच्चे व्यावहारिक रूप से गणित के कार्य करते हैं तथा इसको रिकार्ड के लिए 5 क्रमिक क्रियाकलापों का अनुसरण करते हैं।

- वे अपने विचारों की दूसरे के समक्ष व्याख्या करते हैं।
- वे अपनी-अपनी मानसिक छवि को वस्तुओं या चित्रों द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
- वे अपने बनाये गये चित्रों पर कहानी लिखकर रिकार्ड करते हैं।
- वे अपनी इस्तेमाल की गई विधि का उत्तरोत्तर संक्षेपण बनाते हैं।
- अंत में वे मानक विचारों की प्रासंगिकता को देख सकते हैं और अपना सकते हैं।

गणितीय समस्याओं के हल और अवधारणा निर्माण के लिए विधियां और प्रक्रिया महत्वपूर्ण है। एक विद्यार्थी की व्याख्या को कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के साथ साझा करने से अन्य भिन्न उपागम को खोजने, विधियों या क्रियाओं की व्याख्या करने और व्याख्याओं को विकसित करने में सहायता मिलती है।

वैकल्पिक रणनीति का विकास करना :

जब बच्चे निरूपण का निर्माण कर सकते हैं तब वे गणितीय समस्या के समाधान के लिए, पाठ्यपुस्तक में समस्या हल करने के निर्दिष्ट तरीकों के अलावा, नये तरीकों का विकास कर सकते हैं। एक बच्चा अपने तरीके से गणना करने की विधि का विकास कर सकता है। इस धारणा की उत्पत्ति उन बच्चों का अवलोकन करने के पश्चात हुई जब ऐसे बच्चों को जो कभी विद्यालय गये ही नहीं, को दैनिक जीवन की आवश्यकता से संबंधित विभिन्न प्रकार की गणना अपने ढंग से करते पाया गया जोकि पाठ्यपुस्तक में दी गई विधि से भिन्न था। औपचारिक और अनौपचारिक विधियों के बीच में संबंध की कमी ही, बच्चों में विद्यालय गणित के प्रति अरुचि और विश्वास खोने का मुख्य कारण है।

बच्चों के लिए सदैव नई-नई रणनीति का विकास करना संभव नहीं है। परन्तु जब कभी भी बच्चा नई-नई विधि को लेकर आता है तब उसे पुनर्बर्लन की आवश्यकता होती है। वैकल्पिक रणनीति की खोज करने का प्रयास कक्षा कक्ष गतिविधियों में सदैव करना चाहिए।



टिप्पणी

एक समस्या के समाधान के लिए विधि या संक्रिया के बारे में चर्चा करने के पश्चात, बच्चों को कक्षा कक्ष में चर्चा किये रणनीति का, वैकल्पिक रणनीति, व्यक्तिगत रूप से या सामूहिक रूप से, खोजने/सोचने के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए।

प्रायः गणित अध्यापक पाठ्यपुस्तक में दी गई औपचारिक विधियों के बारे में जड़ होते हैं और उससे हटकर थोड़ा सा भी विचलन की आज्ञा नहीं देते हैं। इस प्रकार का दृष्टिकोण बच्चों को वैकल्पिक रणनीति खोजने में सहायता नहीं करता है और बच्चे अर्थपूर्ण ढंग से गणित सीखने में रूचि नहीं लेते हैं। गणित अध्यापक होने के नाते आपको बच्चों के वैकल्पिक रणनीति विकसित करने की क्षमता को पहचानने की आवश्यकता है और उन्हें ज्यादा से ज्यादा प्रोत्साहित करने की आवश्यकता है।

समस्या समाधान और समस्या प्रस्तुत करना

गणित की समस्याओं को हल करना और समस्या हल करने की विधि यद्यपि भिन्न है फिर भी दोनों में काफी समानता है। समस्याओं को समझने में, समस्या को हल करने के लिए विभिन्न संभावित प्रक्रियाओं की जांच करने और समस्या का समाधान प्राप्त करने में बच्चों में समस्या समाधान करने की योग्यता का विकास, बच्चों को स्वतंत्ररूप से या समूह में, बिना किसी प्रत्यक्ष सहयोग के, समस्या समाधान करने के लिए उत्साहित करके किया जा सकता है। बच्चों में समाधान करने की योग्यता को विकसित करने की प्रवृत्ति को बढ़ावा देने के अतिरिक्त उन्हें समस्या प्रस्तुत करने के लिए भी उत्साहित करें। उपयुक्त प्रासंगिक समस्या प्रस्तुत करना यह सूचना देता है कि गणित की अवधारणाओं, प्रक्रियाओं और विधियों को समझने का स्तर क्या है? इस तरह का अभ्यास कक्षा कक्ष में बार-बार करने के लिए बच्चों को प्रेरित करें।

समस्या समाधान की विधियों और समस्या प्रस्तुतीकरण की विधियों के बारे में इस पेपर के इकाई-4 में विस्तृत चर्चा की जा चुकी है।

E-7 क्या समस्या प्रस्तुतीकरण गणित समस्या समाधान के लिए वैकल्पिक तरीकों को विकसित करने में सहायक है? अपने उत्तर के समर्थन में उदाहरण दें।

E-8 वस्तुओं के हस्त कार्य साधन के द्वारा संख्या के अवधारणा के विकास का एक उदाहरण दें।

1.3.2 गणित का भय

यहां पर ऐसे विद्यार्थियों के कथन है जो गणित में अपने प्रदर्शन को लेकर काफी गंभीर है। “जब मैं गणित की समस्याओं को देखता हूँ तो मेरा मस्तिष्क सुन्न हो जाता है। मुझे लगता है कि मैं मूर्ख हूँ और आसान कार्यों को किस प्रकार करना है ये भी मुझे याद नहीं रहता है।”

“गणित में सदैव केवल एक ही सही उत्तर होता है, और उस उत्तर को आप प्राप्त नहीं कर सकते तो आप असफल हैं यही बात मुझे पागल कर देती है।”



“गणित की परीक्षा से मुझे बहुत डर लगता है, मेरे हाथों में पसीना आ जाता है, मेरी साँसे तेज हो जाती हैं और मैं पेपर पर अपना ध्यान केंद्रित नहीं कर पाता हूँ। जब मैं चारों ओर देखता हूँ तब मेरी हालत और खराब हो जाती है क्योंकि सभी अपना कार्य कर रहे होते हैं और केवल मैं ही हूँ जो पेपर को हल नहीं कर सकता।”

“मैंने जब भी गणित की कक्षा में भाग लिया मैं उसमें सदैव असफल रहा। मुझे ये कभी भी समझ में नहीं आया कि अध्यापक क्या कह रहे हैं और मेरा दिमाग चकरा जाता है।”

“मैं जब नौ वर्ष का था तभी से गणित से मुझे नफरत हो गई है उस वक्त पहाड़ा याद न होने के कारण मेरे पिताजी ने मुझे एक सप्ताह तक सजा दी।”

“जब मैं छोटा था तो सजा के रूप में मेरे पिताजी, जो गणित के अध्यापक थे, मुझे गणित के प्रश्न हल करने के लिए बाध्य करते थे।”

“गणित में बहुत सारे तथ्यों, सूत्रों और प्रक्रियाओं को याद करना पड़ता है।”

“गणित मेरे जीवन के लिए प्रासंगिक नहीं है।”

“गणित मुख्यतः अंक गणित है।”

“गणित एक उबाऊ विषय है।”

आपने इसी तरह के और कथन बहुत सारे बच्चों से अवश्य सुने होंगे जो गणित में अपने प्रदर्शन को लेकर बहुत ज्यादा चिंतित हैं और जिनके मन में गणित के प्रति भय उत्पन्न हो चुका है।”

आपके कुछ साथियों को भी प्राथमिक विद्यालय के गणित को समझने में बहुत कठिनाई होती होगी। सदियों से गणित विषय को विद्यालय के सभी विषयों में सबसे ज्यादा कठिन समझा जाता है। इसके क्या संभावित कारण हो सकते हैं? विद्यालय गणित पढ़ाने-सिखाने के लिए विद्यालय गणित को जिस प्रकार विजाईन किया है उसमें चार मुख्य बातें अंतर्निहित हैं और जिसके कारण विद्यार्थियों में भय और चिंता उत्पन्न होती है।

- पहला = यह वास्तविक, अर्थपूर्ण और सहायक पाठ्यपुस्तक से रहित है। एक प्रसिद्ध गणितज्ञ के शब्दों में गणित के साथ समस्या यह है कि यह किसी के बारे में नहीं है।”
- दूसरा = विद्यालय गणित प्रायः अमूर्त प्रतीकों के उपयोग को शामिल करता है जिसके कारण विद्यार्थी गणित को समझने में कठिनाई महसूस करते हैं।
- तीसरा = विद्यालय गणित में बच्चों को नये पेपर और पेन्सिल रणनीति अपनाने की आवश्यकता होती है जो कि उनके द्वारा विकसित किये गये रणनीति से अलग होता है।
- चौथा = विद्यालय गणित को प्रायः निर्दिष्ट प्रक्रियाओं के सैट के रूप पढ़ाया/सिखाया जाता है चाहे बच्चे वास्तव में संख्याओं और उनके संबंधों को समझ पाते हैं या नहीं। प्रायः समस्याओं का सही उत्तर प्राप्त करने पर अधिक बल दिया जाता है और समाधान प्राप्त करने की प्रक्रिया को समझने के लिए विशेष प्रयास नहीं किया जाता है। सबसे ऊपर है गणित में शुद्धता (सटीकता) जो गणित को और अधिक कठिन बनाता है।



टिप्पणी

मनोवैज्ञानिक दृष्टिकोण से, मानव अधिगम के प्रभावी प्रतिमान, बच्चा, एक सूचना प्रसंस्करण के रूप में, नई सूचनाओं के वर्गीकरण या श्रेणीकरण करके और उनको उपस्थित अनुभवों के साथ जोड़कर प्रसंस्करण के कई तरीकों से गुजरकर अर्थ निकालने का प्रयास करता है।

मानव सूचना प्रसंस्करण तंत्र के तीन मुख्य विशेषतायें हैं जिसका छोटे बच्चों को औपचारिक गणित से परिचय कराने में प्रत्यक्ष निहितार्थ है।

1. **आगमन विधि से अधिगम**—एक मानव के रूप में हम आगमन विधि में संलग्न रहने के काफी योग्य लगते हैं (एक सामान्य नियम या प्रतिरूप का अनुमान विशेष स्थितियों के द्वारा लगाना) परन्तु निगमनात्मक तर्क (आगमन के विपरीत सामान्य नियम से विशेष स्थिति का अनुमान लगाना) के लिए उसकी अपेक्षा कम योग्य है। आगमनात्मकतर्क एक मूल विधि है जिसके द्वारा बच्चे आसानी से अनुभवों को वर्गीकरण और श्रेणीबद्ध करके उन्हें अवधारणात्मक संरचना और प्रतिदर्शों में बदलकर अपनी दुनिया को समझ सकते हैं। बच्चों के सीखने के प्रक्रिया में आगमनात्मक विधि के महत्व को बहुत लम्बे समय से पहचाना गया है और बहुत लम्बे समय से एक सुदृढ़ अवयव रहा है।
2. **क्रियाशील स्मृति की सीमित क्षमता**—गणित शिक्षण के समय प्रायः हम इस बात से अनभिज्ञ रहते हैं कि मानव की सूचना संसाधन की क्षमता सीमित होती है। उदाहरण के लिए मिलर ने विभिन्न प्रमाणों के द्वारा यह प्रदर्शित किया कि हम मानव केवल 7 अलग-अलग सूचनाओं के टुकड़ों को अपने लघु अवधि या क्रियाशील स्मृति में रखने के योग्य हैं और इसलिए एक वयस्क के रूप में हम 17×9 जैसे समस्या का आसानी से हमारे मस्तिष्क में संसाधित कर लेते हैं परन्तु 184×596 को संसाधित करने में हमें बहुत कठिनाई होती है। हमें वह प्रक्रिया मालूम है जिसके द्वारा हम दूसरी समस्या का समाधान प्राप्त करते हैं और हम प्रक्रिया में शामिल गणना के अलग-अलग चरणों को हल करके उत्तर प्राप्त करते हैं। हम एक समय में सारी सूचना को अपने मस्तिष्क में नहीं रख सकते हैं। जब हम एक चरण की गणना कर रहे होते हैं तो पहले की गई गणना के परिणाम को संभवतः हम भूल जाते हैं। बच्चों के साथ यह हर समय होता है जबकि समस्या की संख्यायें बहुत कम और छोटे होते हैं।
3. **जागरूकता, नियंत्रण अधिबोधन का विकास**—मानव प्रसंस्करण तंत्र की तीसरा सामान्य विशेषता जिस के बारे में हमें सोचना है वह एक तंत्र है जो केवल सीखता ही नहीं है परन्तु कैसे सीखना है यह भी सिखाता है। जब कोई अपने सोचने समझने सीखने के तरीकों से अवगत रहता है “जिसे अमेरिकन मनोवैज्ञानिक ‘अधि-बोधन’ (meta-cognition) कहते हैं, तो वह अपने क्रियाओं और सीखने की प्रक्रिया पर नियंत्रण करके अधिक योग्यता अर्जित करता है। हम बच्चों को गणितीय समस्याओं को हल करने में व्यस्त रखने में अधिक बल देते हैं जबकि बच्चे समस्या का समाधान किस प्रकार से कर सकते हैं उसका वर्णन करने के लिए उन्हें उत्साहित करने में हमें अधिक रूचि लेना चाहिए। पाठ्यपुस्तक के निर्दिष्ट तरीकों से समस्या का समाधान करना उबाऊ और बोझिल लगता है। परन्तु यदि हम बच्चों की अधि-बोधन क्षमताओं का पता लगा सकते हैं तो हम



उन्हें उनके योग्यता स्तर के आधार पर उचित समस्या हल करने के लिए दे सकते हैं जिसको वे अपने तरीके से हल कर सकते हैं और उसके समर्थन में अपना तर्क भी प्रस्तुत कर सकते हैं।

बच्चों को सूचना प्रसंस्करण योग्यता के जानकारी के बिना, अध्यापक और अभिभावक बच्चों को सिखाये गये पाठों को बार-बार रटकर गणित में अच्छा प्रदर्शन करने के लिए बाध्य करते हैं। सिखाये गये पाठ मुख्यतः निगमनात्मक होते हैं और विद्यार्थियों को गणित पाठ्यपुस्तक की समस्याओं, जिनका उनके वास्तविक जीवन से बहुत कम संबंध है, को समझने के लिए आवश्यक रूचि और योग्यता का विकास किये बिना, समस्या को हल करने के लिए बाध्य करते हैं।

सूचना प्रसंस्करण की कमी से संबंधित कारणों के अतिरिक्त अन्य और कारण कक्षा कक्ष और घर के वातावरण से संबंधित हैं जिसके कारण विद्यार्थियों में गणित के प्रति अरूचि और भय उत्पन्न होता है।

गणित के प्रति भय के कुछ कारण निम्न प्रकार से हैं—

- **गणित के बारे में पूर्व नकारात्मक अनुभव :** निम्नांकित में से एक या एक से अधिक से संबंधित हो सकता है।
 - **विद्यालय का अप्रिय वातावरण :** ऐसे विद्यालय जहां पर गणित पाठ्यपुस्तक के पाठ्यक्रम को पूरा करने के लिए और गणितीय समस्या को हल करने के लिए बच्चों को सोचने व वैकल्पिक तरीकों को विकसित करने की स्वतंत्रता दिये बिना बहुत ही सख्त और जड़तात्मक अनुशासन बनाये रखा जाता है वहां का वातावरण बच्चों में गणित के प्रति अरूचि और तनाव उत्पन्न करता है।
 - **सकारात्मक आदर्श की कमी :** जब बच्चों को गणित सीखने में घर से सहायता नहीं मिलती है और विद्यालय में अध्यापकों से प्रोत्साहन नहीं मिलता है तब बच्चों को गणितीय अवधारणाओं को समझने में बहुत कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है। इससे बच्चों में गणित प्रदर्शन को लेकर चिंता बढ़ने लगती है। अभिभावक और अध्यापक का गणित में बेहतर और उच्च प्रदर्शन के लिए लगातार दबाव, बच्चों में गणित के प्रति भय को उत्पन्न करता है।
- जातीय और/या लिंग की रूढ़िबद्ध धारणा :** लोगों में सामान्यतः यह भाव पाया जाता है कि लड़कियाँ और प्रतिकूल सामाजिक परिवेश से आये बच्चे गणित में अच्छा प्रदर्शन नहीं करते हैं। ऐसे बच्चों को गणित कक्षा में हेय दृष्टि से देखा जाता है तथा उनसे तिरस्कार पूर्ण व्यवहार किया जाता है।
- **विद्यालय में गणित की समस्याओं को सजा के रूप में इस्तेमाल करना :** कुछ विद्यालयों में अध्यापक बच्चों को अनुशासित करने के लिए गणित की समस्याओं को हल करने के लिए देते हैं जिससे बच्चों में गणित के प्रति भय उत्पन्न हो जाता है।



टिप्पणी

- **निर्धारित समय में परीक्षा देने का दबाव :** विद्यालय में परीक्षा पर इतना अधिक बल दिया जाता है कि यह महसूस होता है कि विद्यालय में सभी अधिगम का लक्ष्य केवल परीक्षा में अच्छा प्रदर्शन करना है।

बच्चों के ऊपर, साप्ताहिक, पाक्षिक, मासिक, त्रैमासिक, अर्धवार्षिक और वार्षिक परीक्षाओं में अच्छा प्रदर्शन करने के लिए अभिभावक और विद्यालय की तरफ से बहुत अधिक दबाव डाला जाता है। सतत और व्यापक मूल्यांकन में परीक्षाओं की आवृत्ति पहले से और अधिक है। नियमित अंतराल में इतना अधिक परीक्षा होना और सभी परीक्षाओं में उच्च प्रदर्शन करना, विशेषकर गणित विषय में विद्यार्थियों को हतोत्साहित करता है।

- **दूसरों के समक्ष अपने आपको मूर्ख महसूस करने का डर :** बहुत से विद्यार्थी गणित से संबंधित समस्याओं और शंकाओं को खुलकर व्यक्त नहीं कर पाते हैं क्योंकि उन्हें यह भय रहता है कि दूसरे उसे कहीं मूर्ख न समझ ले। इस तरह वह शंकाओं का ढेर लगाता रहता है और अंत में गणित सीखने में अपने आपको लाचार पाता है।
- **तैयारी में कमी :** अधिकांश समय अधिक परीक्षाओं का सामना करने के कारण, बच्चे कक्षा के लिए और परीक्षाओं के लिए सदैव अच्छे ढंग से तैयारी नहीं कर पाते हैं। ऐसी कोई भी स्थिति चिंता उत्पन्न करेगी।

1.3.3 गणित अधिगम को आनंददायक बनाना

वयस्कों की एक बहुत बड़ी संख्या है जिसमें अध्यापक भी शामिल हैं जो यह सोचते हैं कि गणित एक गंभीर विषय है और इसे गंभीर होकर पढ़ाना/सिखाना चाहिए तथा इसमें मनोरंजक क्रियाकलापों के लिए कोई स्थान नहीं है। परन्तु विद्यालय के प्रारंभिक स्तर पर नौसिखिया बच्चों के लिए यह गणित पढ़ाने/सिखाने का गंभीर तरीका उनमें गणित के प्रति अरुचि और भय उत्पन्न करता है और अंत में इसका परिणाम यह होता है कि बच्चा विद्यालय जाना ही बंद कर देता है।

बच्चे उन क्रियाकलापों से मूल गणितीय अवधारणाओं को सीखते और समझते हैं जिनसे उन्हें आनंद प्राप्त होता है। प्रत्येक बच्चा दूसरे बच्चों के साथ खेल खेलना चाहता है और ये खेल ही कई गणितीय अवधारणा को सीखने और समझने के लिए शायद बेहतर माध्यम हो सकते हैं। आप ऐसा कोई भी परिचित खेल ले सकते हैं जिसे बच्चे आनंदपूर्वक खेलते हैं। इस खेल में आप मामूली सुधार करके गणित की कुछ अवधारणाओं को समावेश करें ताकि बच्चे खेल-खेल में ही और मनोरंजक ढंग से इन अवधारणाओं को समझ और सीख सकें। इन प्रयासों के अतिरिक्त आप कुछ रूचि कर क्रियाकलापों की रचना करें जिससे विद्यार्थी गणितीय अवधारणाओं को आसानी से समझ सकें।

कुछ उदाहरण निम्नांकित हैं—

- **संख्या दौड़—**कक्षा प्रथम के विद्यार्थियों को 4 या 5 समूह में विभाजित करें और प्रत्येक समूह को अपना नेता चुनने के लिए स्वतंत्रता दें। प्रत्येक समूह को श्यामपट के समक्ष



पंक्तिबद्ध करके खड़ा करें। उनसे 2 मीटर की दूरी पर उनके समक्ष कंकड़ों का ढेर रखें। जब समूह का नेता संख्या लिखे कार्ड को समूहों के विद्यार्थियों को दिखायेगा तब प्रत्येक समूह का प्रथम बच्चा दौड़कर कंकड़ों के ढेर के पास पहुँचेगा तथा कार्ड पर लिखे (माना 5 लिखा है) संख्या के बराबर कंकड़ों के ढेर से कंकड़ उठाकर अपना हाथ तुरंत ऊपर करेगा। जो बच्चा सबसे पहले हाथ ऊपर करेगा उसके कंकड़ों की नेता गणना करके यह सुनिश्चित करेगा कि कंकड़ों की संख्या ठीक है। विजेता बच्चा अपने समूह के लिए एक अंक अर्जित करेगा। जो बच्चे अपनी बारी पूरा कर चुके हैं वे अपने-अपने समूह के पंक्ति के अंत में खड़े होंगे। नेता दूसरा कार्ड दिखायेगा और प्रत्येक समूह का दूसरा बच्चा कंकड़ों के ढेर के पास दौड़कर पहुँचेगा और यह खेल उसी प्रकार जारी रहेगा। खेल के अंत में जो समूह सबसे अधिक अंक अर्जित करेगा वह समूह खेल का विजयी समूह होगा।

- **स्थानीय मान**—इस खेल में दो समूह या दो खिलाड़ी हो सकते हैं। प्रत्येक समूह या खिलाड़ी के पास एक स्लेट या ड्राइंग सीट होगा जिस पर दो आसन्न बाक्स में “दहाई और इकाई” लिखा होगा। 10 छोटे कार्ड तैयार करें। प्रत्येक कार्ड में एक अंक 0 से 9 तक लिखकर इन कार्डों को मिलाकर उल्टा रख दें। पहला खिलाड़ी या समूह का एक सदस्य इन कार्डों में से एक कार्ड उठाकर इकाई और दहाई वाले स्लेट पर अपनी समझ के अनुसार निर्णय लेकर इकाई या दहाई के स्थान पर रखेगा। अगला खिलाड़ी या समूह का दूसरा सदस्य एक कार्ड निकाल कर इकाई या दहाई के स्थान पर रखेगा। पुनः पहला खिलाड़ी एक संख्या कार्ड चुनकर इस बार खाली बाक्स में कार्ड को रखेगा। दूसरे समूह के खिलाड़ी भी इसी प्रक्रिया को दोहरायेंगे। प्रत्येक खिलाड़ी इस प्रकार बनी संख्या को पढ़कर बतायेंगे। जो समूह या खिलाड़ी सबसे बड़ी संख्या बनायेगा वह उस राउंड में विजयी होगा।

- निम्नांकित दिये गये आकृतियों में



विद्यार्थियों को इन आकृतियों का इस्तेमाल करके, अपने परिचित वस्तुओं का चित्र आरेखित कहने के लिए कहे। जो विद्यार्थी अधिक प्रकार के चित्र निर्धारित समय में (5 या 10 मिनट) आरेखित करेगा वह विद्यार्थी विजयी होगा।

- **जोड़ का खेल**—इस खेल को दो खिलाड़ी या दो से अधिक खिलाड़ी व्यक्तिगत रूप से या टीम बनाकर खेल सकते हैं (कक्षा II के विद्यार्थी)। इस खेल को खेलने के लिए आपको एक ताश के पैकेट की आवश्यकता पड़ेगी इस ताश के पैकेट के चित्र वाले कार्ड को बाहर निकाल कर अलग रख दें। खिलाड़ी अर्धवृत्ताकार में बैठ जायें। अब ताश को अच्छी तरह मिलाकर खिलाड़ियों के बीच में उलटा करके रख दें। एक खिलाड़ी दो पत्ते खींच कर निकालेगा तथा उसमें लिखे संख्याओं का योग बतायेगा। इस योगफल को उस खिलाड़ी के नाम के सामने स्कोर कार्ड पर लिखकर रखें। इसी प्रकार अन्य खिलाड़ी



टिप्पणी

बारी-बारी से ताश के पत्ते निकालकर संख्याओं का योगफल ज्ञात करेंगे। सभी खिलाड़ी एकदूसरे के स्कोर की जांच करेंगे। जो खिलाड़ी सबसे ज्यादा अंक (योगफल) प्राप्त करेगा वह इस खेल का विजेता होगा।

- **अनुमान खेल**—इस खेल को दो टीम के बीच खेला जाता है। (टीम A और टीम B या कोई और मजेदार नाम रख सकते हैं) यह खेल उच्च कक्षाओं के बच्चों के लिए है। टीम A एक संख्या कागज पर लिखकर अध्यापक को या खेल को खिलाने वाले लीडर को दे। कागज पर क्या संख्या लिखा हुआ इसे टीम B के सदस्य कुछ प्रश्न टीम A से पूछकर अनुमान लगायेंगे और सही उत्तर (अर्थात संख्या का पता लगाना) ढूँढ़ने का प्रयास करेंगे। प्रश्न पूछने की सीमा होगी (मान लीजिये 10 से अधिक नहीं)

टीम के सदस्य जितने कम प्रश्न पूछ कर संख्या का सही अनुमान लगाने में सफल होंगे उतना ही अधिक उनका स्कोर होगा। मान लीजिये एक प्रश्न पूछ कर ही संख्या को पहचान लेते हैं तो 10 अंक, 2 प्रश्न पूछ कर संख्या पहचानते हैं तो 9 अंक। इसी प्रकार प्रश्नों की संख्या बढ़ने पर स्कोर कम होता जायेगा। इसी तरह अब टीम B कागज पर संख्या लिखकर कर अध्यापक को देगा और टीम A के सदस्य संख्या को प्रश्न पूछकर पहचानने का प्रयास करेंगे। यह खेल एक निश्चित राउंड तक इसी प्रकार चलेगा। अंत में जिस टीम ने सबसे अधिक अंक अर्जित किया है वह विजयी टीम होगा।



क्रियाकलाप-2

ऐसे क्रियाकलाप तैयार करें जिसके द्वारा प्राथमिक कक्षाओं के विद्यार्थी मापन की अवधारणा को सीखेंगे और समझेंगे।

.....

.....

.....

.....

.....

कई ऐसे और भी क्रियाकलाप हैं जिसमें भाग लेकर विद्यार्थी मनोरंजक तरीके से गणित सीख सकते हैं। पेपर पर रंगों के द्वारा सममित रंगोली तैयार करना, ओरीगामी (Origami) से परिचित कराना, यह पेपर को मोड़कर 2D और 3D वस्तु बनाने की विधि है। इसके अलावा टेनग्राम (Tangram) से भी परिचय करायें। इसका इस्तेमाल करके कई 2D आकृतियाँ बना सकते हैं। ये सब क्रियाकलाप रूचिकर हैं जिसके माध्यम से विद्यार्थी गणित की अवधारणा को सीख सकते हैं।



खेल, बच्चों के लिए, गणित अधिगम को मनोरंजनपूर्ण और अर्थपूर्ण बनाने का एक शक्तिशाली माध्यम हो सकता है। आप कोई भी खेल ले सकते हैं। आप महसूस करेंगे कि इन खेलों में कहीं न कहीं इन गणितीय अवधारणा का समावेश आप अपनी कल्पना से कर सकते हैं तथा प्रभावकारी ढंग से कर सकते हैं। आओ एक खेल पीटू (Pithu) के बारे में बात करते हैं। इस खेल को देश के विभिन्न भागों में खेला जाता है और इसको अलग-अलग नाम से जाना जाता है। इस खेल में पत्थर के टुकड़े (प्रायः 9 या 10 पीस) या टाइल्स के टुकड़े या लकड़ी के घनाभ को एक के ऊपर एक रखकर एक वृत्त के भीतर रख देते हैं। एक खिलाड़ी गेंद से मारकर इस पत्थरों के टुकड़ों के ढेर को वृत्त से बाहर निकालने का प्रयास करेगा। वह जितने अधिक पीस वृत्त से बाहर निकालता है उतना ही उसका स्कोर होता है। मान लीजिये खिलाड़ी ने 5 पत्थर के पीस वृत्त से बाहर निकालने में सफल रहा तो उसका स्कोर 5 होगा। इसी प्रकार बारी-बारी से सभी खिलाड़ी इस प्रक्रिया को दोहरायेंगे और अपने-अपने लिये अंक अर्जित करेंगे। जो खिलाड़ी सबसे अधिक अंक अर्जित करेगा वह विजयी होगा। इस खेल के माध्यम से बच्चे वस्तुओं को गिनना और जोड़ना सीख सकते हैं।

इस खेल में कुछ परिवर्तन करके आप गणित के कुछ और अवधारणा को इस खेल से जोड़ सकते हैं। दो उदाहरण निम्न प्रकार से हैं।

- आप एक अन्य संकेंद्रीय वृत्त खींच सकते हैं जिसकी त्रिज्या पहले या अंतः वृत्त से आधा मीटर अधिक हो। जब एक खिलाड़ी अन्तः वृत्त से टुकड़ों को विस्थापित करता है तो उसे एक अंक प्राप्त होता है (विस्थापित टुकड़ा अंतः वृत्त से बाहर तथा दूसरे वृत्त के अंदर यदि गिरता है) और यदि यह टुकड़ा बाहरी वृत्त के बाहर गिरता है तो खिलाड़ी 10 अंक प्राप्त करता है। यदि खिलाड़ी तीन टुकड़ों को विस्थापित करता है जिनमें से एक टुकड़ा दोनों वृत्तों के बीच में गिरता है एवं दो टुकड़े बाहरी वृत्त के बाहर गिरते हैं तब खिलाड़ी को 21 अंक (2×10 और 1×1) प्राप्त होते हैं। खेल इसी प्रकार चलता रहता है। यह खेल बच्चों को स्थानीय मान तथा योग को सीखने में सहायता करता है।
- खेल के अन्य भाग में, आप विभिन्न रंगों के टुकड़ों का उपयोग कर सकते हैं, (3 रंगों के टुकड़ों के साथ, प्रत्येक रंग के 3 से 4 टुकड़े) अलग-अलग रंग के टुकड़ों को अलग-अलग अंक प्रदान कर सकते हैं (प्रत्येक सफेद टुकड़े को 1 अंक, प्रत्येक नीले टुकड़े को 2 अंक और प्रत्येक लाल टुकड़े को 3 अंक)। खेल पहले खेल की भांति ही खेला जाता है लेकिन अंकों की गणना में गुणा एवं योग के कौशल की आवश्यकता होती है। क्रियाकलाप और खेलों के अतिरिक्त भी गणित अधिगम को साधन उपलब्ध कराने वाले अनेक मनोरंजक एवं चुनौतीपूर्ण क्रियाकलाप हैं जैसे-प्रतियोगिता एवं प्रश्नोत्तरी में सहभागिता, गणितीय मॉडल एवं चार्ट तैयार करना, पहेलियों को एकत्रित करना एवं उन्हें हल करना।



टिप्पणी

क्रियाकलाप-3

कोई खेल का चुनाव कीजिए जिसे आपके क्षेत्र के बच्चे खेलना पसंद करते हैं। इस खेल के द्वारा गणित किस प्रकार सीखा जा सकता है वर्णन कीजिए। इस खेल के कोई दो विभेदों का उल्लेख कीजिए जिसे आप प्रस्तुत कर सकते हैं। और उस गणितीय अवधारणाओं को बताइए जो इस खेल में परिवर्तन करके सीखी जा सकती है।

.....

.....

.....

.....

.....

E-9 कक्षाकक्ष में गणित के प्रति भय के विकास के क्या कारण हैं?

E-10 गणित के भय को कम करने और कक्षा कक्ष में गणित अधिगम को आनंददायक बनाने के चार तरीकों का वर्णन कीजिये।

गणित अधिगम को आनंददायक बनाने के लिए, जब शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया चल रही होती है या विशेष रूप से जब गणित का शिक्षण किया जाता है तो कक्षा-कक्ष के वातावरण को विद्यार्थियों के अनुकूल बनाने की आवश्यकता होती है। कक्षा-कक्ष में बच्चों का बच्चों के साथ एवं बच्चों का अध्यापक के साथ, परस्पर क्रिया, स्वतंत्र एवं मनोरंजक होना अति आवश्यक है। ऐसा विश्वास और समानता का वातावरण चिंता एवं भय को दूर करने में सहायक होगा और गणित अधिगम को वास्तव में आनंददायक एवं ज्यादा अर्थपूर्ण तथा ज्यादा प्रभावकारी बनाता है।

1.4 सारांश

- बच्चों की सोच दो प्रक्रियाओं के साथ शुरू होती है-
 1. बोध या समझ (किसी वस्तु के प्रत्यक्ष सम्पर्क में आने के परिणाम स्वरूप उस वस्तु के बारे में प्राप्त ज्ञान)
 2. निरूपण (अनुभूत की गयी वस्तु की मानसिक कल्पना) सोचने की प्रक्रिया पर पियाजे की अवधारणा के अनुसार-
- जो कि आत्मसात्करण और समायोजन दो प्रक्रियाओं के बीच साम्यवस्था स्थापित करने के पश्चात, नयी स्थिति के अनुकूलन के संगठन की प्रक्रिया है।
- पियाजे ने अपनी अवधारणा में बच्चे के संज्ञान को चार अवस्थाओं में विकसित किया है, जिनके नाम हैं-



- (i) संवेदी क्रियात्मक काल (जन्म से लेकर 2 वर्ष की आयु तक)
 - (ii) पूर्व-संक्रिया काल (2 वर्ष से 7 वर्ष की आयु तक)
 - (iii) मूर्त-संक्रिया काल (7 वर्ष से 11 वर्ष की आयु तक)
 - (iv) औपचारिक संक्रिया काल (11-12 वर्ष से 14-15 वर्ष की आयु तक)
- बच्चे में गणितीय अवधारणा का विकास, संज्ञानात्मक विकास के चलन का अनुसरण करता है।
 - पूर्व संख्याओं की अवधारणा जैसे-मिलान करना, छंटनी करना, क्रम की तुलना करना आदि विद्यालय से पूर्व के वर्षों के दौरान ही विकसित हो जाती है। (6 वर्ष की आयु से पहले)
 - जब संख्यात्मक अवधारणा और अधिकतर मापन की अवधारणा, मूर्त संक्रिया काल के दौरान पूर्ण रूप से विकसित होती है अर्थात् 11 वर्ष की आयु से पूर्व विमीय सोच को विकसित होने में एक या दो वर्ष अधिक की आवश्यकता होती है।
 - संख्याएं, लम्बाई, द्रव्यमान और भार आदि के संरक्षण और परिवर्तन शीलता आदि, औपचारिक संक्रिया काल प्रारम्भ होने से पहले स्थापित हो जाते हैं जबकि आयतन तथा क्षेत्रफल लम्बा समय लेते हैं।
 - विद्यालय अधिगम की प्राथमिक अवस्थाओं के दौरान, गणित अधिगम से संबंधित कुछ मूलभूत तरीके हैं जैसे-वस्तुओं का हस्तकौशल, वास्तविक जीवन की स्थितियों में अर्थपूर्ण कार्य का प्रदर्शन, अनेक तरीकों से निरूपण, वैकल्पिक व्यूह रचना का उपयोग एवं क्रमिक विकास, और समस्या समाधान एवं समस्या निर्माण आदि।
 - गणित में चिंता एवं भय, विभिन्न कारकों द्वारा होता है जो कि विद्यालयी अभ्यास, मानव सूचना प्रसंस्करण की प्रकृति में व्यवधान उत्पन्न करना, कक्षा-कक्ष और घर के वातावरण से संबंधित है।
 - गणित अधिगम विभिन्न प्रकार के तरीकों जैसे-विद्यार्थी-अनुकूल क्रियाकलापों का प्रदर्शन, खेल मॉडल और चार्ट तैयार करना, प्रश्नोत्तरी और प्रदर्शनी में सहभागिता, पहेलियों को एकत्र करना एवं उन्हें हल करना आदि को अपनाकर आनंददायक बनाया जा सकता है।

1.5 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर

E-1 बोध एवं निरूपण

E-2 आत्मसात्करण एवं समायोजन

E-3 मिलान एवं छंटनी करना



टिप्पणी

- E-4 मूर्त सक्रिया काल
- E-5 औपचारिक सक्रिया काल
- E-6 वस्तु की स्थिति के निरपेक्ष जब बच्चा वस्तु की लम्बाई की अपरिवर्तनीयता को महसूस कर लेता है, तब वह लम्बाई के संरक्षण को प्राप्त कर लेता है।
- E-7 हां। अपने उत्तर के समर्थन में उदाहरण दीजिए।

1.6 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

Anghileri, Julia (ed.) (1995). *Children's mathematical thinking in primary years : Perspectives on children's learning*. London : Cassell

Copeland, Richard W. (1979). *How children learn mathematics : Teaching implications of piaget's research (3rd edn.)* New York : Macmillan Publishing Co.

Dickson, Linda, Brown, Margaret & Gibson, Olwen (1984). *Children learn mathematics*. New York Holt, Rinehart & Winston.

1.7 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1. विद्यालय से पूर्व के वर्षों के दौरान, पूर्व संख्या की अवधारणा के विकास में बोध एवं निरूपण की भूमिका की व्याख्या कीजिए।
2. संज्ञानात्मक विकास को अवस्थाओं के संगत, गणित अवधारणाओं के विकास की क्या विशेषताएं हैं?
3. गणित अधिगम की अवधारणा के मूलभूत तरीके क्या हैं? आप बच्चों के लिए इनको कैसे आनंददायक बना सकते हैं?



इकाई 2 गणित एवं गणितीय शिक्षा: महत्व क्षेत्र एवं सार्थकता

संरचना

- 2.0 परिचय
- 2.1 अधिगम उद्देश्य
- 2.2 गणित की प्रकृति
- 2.3 गणित शिक्षण का महत्व
 - 2.3.1 वास्तविक जीवन में गणित
 - 2.3.2 गणित और ज्ञान की अन्य शाखायें
 - 2.3.3 गणित और समस्या समाधान
 - 2.3.4 गणितीय सोच की क्षमता
- 2.4 सारांश
- 2.5 आपकी प्रगति की जाँच के लिए आदर्श उत्तर
- 2.6 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें
- 2.7 अन्त्य-इकाई अभ्यास

2.0 परिचय

गणित हमारे जीवन के सभी पहलुओं में व्याप्त है। प्रत्येक व्यक्ति चाहे वह किसान हो, दैनिक मजदूर, कारीगर, अध्यापक या वैज्ञानिक हो सभी अपने दिन-प्रतिदिन की अलग-अलग परिस्थितियों में गणित के सिद्धांतों का उपयोग करते हैं। हमारे जीवन में गणित का प्रमुख स्थान है इसलिए स्कूल पाठ्यक्रम में गणित को एक विशेष स्थान प्राप्त है।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा के गणित दस्तावेज में स्पष्ट रूप से उल्लेखित है कि श्रेष्ठ गणित शिक्षा का परिदृश्य दो मुख्य अवधारणा पर आधारित है कि सभी विद्यार्थी गणित सीख सकते हैं और विद्यार्थियों को गणित सीखने की आवश्यकता है। इसलिए यह अत्यंत आवश्यक है कि हम सभी विद्यार्थियों को उच्च स्तरीय गणित शिक्षा प्रदान करें। गणित के इस परिदृश्य को साकार करने के लिए हमें निम्नांकित मुद्दों का समीक्षात्मक रूप से विश्लेषण करने की आवश्यकता है।

- विद्यालय स्तर पर गणित शिक्षण के क्या लक्ष्य होने चाहिए?
- अध्यापक, विद्यार्थियों में गणित के प्रति रूचि किस प्रकार विकसित कर सकते हैं?



टिप्पणी

- विद्यार्थियों में किस प्रकार के ज्ञान और कौशल का विकास किया जा सकता है?
- गणित अधिगम की क्या प्रकृति होनी चाहिए?

इस इकाई में आप उपरोक्त लिखित कुछ मुद्दों के बारे में उत्तर प्राप्त कर सकेंगे। आप निश्चित रूप से गणित की प्रकृति का अवलोकन करेंगे जिसके आधार पर आप अपने विद्यार्थियों के लिए गणित शिक्षा का स्वरूप निर्धारित कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त आप प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षा के महत्व के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे।

इस इकाई के अध्ययन में आपको लगभग आठ घंटे का समय लगेगा।

2.1 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप सीख सकेंगे—

- उपयुक्त उदाहरण देकर गणित की प्रकृति का वर्णन करना।
- दैनिक जीवन में गणित की उपयोगिता की व्याख्या करना।
- गणितीय सोच क्या है? वर्णन करना।
- ज्ञान की अन्य शाखाओं के साथ गणित के संबंधों का वर्णन करना।

2.2 गणित की प्रकृति

अध्यापक के रूप में, आपको बच्चों को गणित पढ़ाने का अनुभव है। कभी-कभी आपने महसूस किया होगा कि सभी विषयों में, गणित का एक विशेष स्थान है। क्या आप ऐसा सोचते हैं?

यदि हाँ तो इसके क्या कारण हैं—

उपरोक्त प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए आपको गणित के महत्वपूर्ण गुणों को समझना होगा जिनके कारण गणित को सभी क्षेत्रों में विशेष स्थान प्राप्त है। गणित की प्रकृति गणित शिक्षण और अधिगम विधि को बहुत ज्यादा प्रभावित करती है। अतः प्राथमिक विद्यालय के शिक्षकों को गणित की प्रकृति के बारे में जानने की आवश्यकता है। आओं गणित की प्रकृति के बारे में विस्तृत चर्चा करते हैं।

गणित तार्किक है:— गणित को तर्क की एक शाखा के रूप में स्वीकार किया जाता है। C.G. Hempel के अनुसार तर्क के निम्नांकित निष्कर्ष निकाल सकते हैं—

- गणित के सभी अवयव अर्थात् अंकगणित, बीजगणित और विश्लेषण को तर्क की अवधारणा के आधार पर परिभाषित किया जा सकता है।
- गणित के सभी प्रमेयों को इन परिभाषाओं से निगमित किया जा सकता है।



इस प्रकार से यह कहा जा सकता है कि गणित सत्यता को तर्क के द्वारा स्थापित करता है। गणितीय कथनों का प्रमाण स्वीकृत नियमों, परिभाषाओं और अभिधारणाओं का उपयोग करके, क्रमिक तार्किक पक्षों से बना होता है।

निम्नांकित गणितीय कथन का अवलोकन करें।

S1- 'दो सम संख्याओं का जोड़ एक सम संख्या को उत्पन्न करता है।'

इस कथन (S1) को आप केवल अनुभूत अवलोकन के आधार पर प्रमाणित नहीं कर सकते हैं। आप अनेक उदाहरण और उनका परीक्षण करके ही यह कह सकते हैं कि कथन सत्य या असत्य है। यदि आप सम संख्या और जोड़ की अवधारणा को समझते हैं तो इस कथन को आप गणितीय ढंग से लेते हैं और सिद्ध कर सकते हैं।

किसी भी सम संख्या को $2n$ के रूप में लिख सकते हैं जहाँ पर n प्राकृत संख्या है। दो सम संख्याएँ $2n_1$ और $2n_2$ (जहाँ पर n_1 व n_2 प्राकृतिक संख्या हैं) लीजिए। इन दोनों सम संख्याओं का योग $2n_1 + 2n_2 = 2m$ है। जहाँ $m = n_1 + n_2$ एक प्राकृतिक संख्या है। यहाँ पर संख्या $2m$ 2 से विभाजित है अतः $2m$ एक सम संख्या है। इस प्रकार से दो सम संख्याओं का योग एक सम संख्या होता है। इस प्रकार का तर्क जिसमें ज्ञात परिणामों, परिभाषाओं, नियमों का उपयोग करके किसी कथन की सत्यता की जाँच की जाती है, उसे निगमित तर्क कहते हैं।

अपनी प्रगति जाँच के लिए निम्नांकित कार्य को संपादित करें।

E1 - "निगमित तर्क का प्रयोग करके सिद्ध करें कि दो विषम संख्याओं का योग एक सम संख्या है"

क्रियाकलाप 1:- अपने विद्यालय में इस्तेमाल की जाने वाली गणित की पाठ्यपुस्तक का अध्ययन करें और पाँच ऐसे उदाहरण ढूँढ़ें जहाँ पर आपने पाया कि निगमित तर्क का उपयोग किया गया है।

एक अन्य प्रकार के तर्क आगमनात्मक तर्क का प्रयोग किया जाता है।

निम्नांकित उदाहरण पर ध्यान दें:

2, 4, 6, 8, 10, 16, 36, 54, 68 और 102 सभी सम संख्या हैं, इनमें से किसी भी दो सम संख्याओं को जोड़े और पता लगाये कि क्या योगफल सम संख्या है या विषम संख्या है?

$$2 + 4 = 6 \quad 6 \text{ एक सम संख्या है।}$$

$$6 + 4 = 10 \quad 10 \text{ एक सम संख्या है।}$$

$$10 + 8 = 18 \quad 18 \text{ एक सम संख्या है।}$$

$$54 + 22 = 76 \quad 76 \text{ एक सम संख्या है।}$$



टिप्पणी

और इसी तरह अन्य सम संख्याओं के योग पर सम संख्या ही प्राप्त होती है। आप अपने विद्यार्थियों को किन्हीं दो सम संख्याओं को जोड़ने के लिए कहें तो प्रत्येक स्थिति में उन्हें योगफल सम संख्या ही प्राप्त होगी।

इस प्रकार के तर्क को आगमनात्मक तर्क कहते हैं। गणित में कई स्थितियों में गणितीय निष्कर्ष निकालने के लिए आगमन तर्क का उपयोग करते हैं। आओं ज्यामिति के एक उदाहरण पर ध्यान दें। एक त्रिभुज के एक कोण की माप 80° और दूसरे कोण की माप 60° है तो तीसरे कोण की माप क्या होगी? यदि आप इस त्रिभुज की रचना करके तीसरे कोण की माप करते हैं तो आप इसकी माप 40° पायेंगे। इसी प्रकार के कई त्रिभुजों की रचना करके अनेक कोणों की माप ज्ञात करें। आप पायेंगे कि, प्रत्येक स्थिति में तीनों कोणों का योग 180° होगा। यदि यह निष्कर्ष पहली स्थिति के लिए, द्वितीय स्थिति के लिए, तृतीय स्थिति के लिए सत्य है तथा अन्य इसी प्रकार की स्थितियों के लिए भी सत्य है तो हम उचित रूप से निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी त्रिभुज ABC के तीनों कोणों का योग 180° होता है। इस प्रकार हम तर्क विधि द्वारा किसी सामान्यीकृत कथन पर पहुँचते हैं जो कई समस्याओं का समान स्थितियों में, संबंधों का अवलोकन करने के पश्चात प्राप्त होता है, उसे गणितीय आगमन कहते हैं। यदि एक कथन n स्थितियों के लिए सत्य है तो $n + 1$ स्थितियों के लिए भी सत्य होगा।

अपनी प्रगति जाँचें:-

E2- “प्रत्येक अभाज्य संख्या के दो गुणनखंड होते हैं”- इस कथन को सिद्ध करने के लिए किस प्रकार का तर्क का इस्तेमाल किया गया है।

उपरोक्त चर्चा से यह निष्कर्ष निकलता है कि गणित एक शुद्ध तर्क का रूप है। निगमनात्मक विधि गणित की एक महत्वपूर्ण तार्किक प्रक्रिया है और अन्य तर्क प्रक्रियाओं के लिए अनुकरणीय मॉडल है। सभी अभिगृहीत, स्वयं सिद्धतथ्यों (Axioms) का निगमन तर्क के नियमों के द्वारा किया गया है। यूक्लिड की ज्यामिति इसका एक अच्छा उदाहरण है और उनकी विधि जिसमें समस्याओं को ‘क्या दिया है?’ ‘क्या सिद्ध करना है?’ में तोड़कर हल करना एक तार्किक प्रक्रिया के अलावा और कुछ नहीं है?

गणित चिन्हात्मक है:-

निम्न दो कथनों पर ध्यान दें “ दो सौ को जब दस से गुणा किया जाता है तो दो हजार प्राप्त होता है” या दो प्राकृतिक संख्याओं के योग का वर्ग उन संख्याओं के वर्गों और उनके गुणनफल के दुगने के योग के बराबर होता है।” जब हम इन दोनों कथनों को गणितीय चिन्हों के द्वारा व्यक्त करने पर निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

$$200 \times 10 = 2000$$

$$\text{और} \quad (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

आप देख सकते हैं कि चिन्हों के उपयोग करने से गणितीय अभिव्यक्ति संक्षिप्त और स्पष्ट बन जाती है। यदि आप चिन्हों से परिचित हैं तो आप गणितीय अभिव्यक्ति को चिन्हात्मक रूप में



लिख सकते हैं। चिन्ह जैसे संख्यांक, चार मूलभूत संक्रियाएँ (+, -, /, ×) या लाइन, कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्तों के प्रतीक चिन्ह और इसी तरह के अन्य चिन्हों से सभी परिचित हैं और दैनिक जीवन में इसका उपयोग सभी लोग करते हैं।

कठिन और अमूर्त विचारों को जो कि गणित का मुख्य संबंध है, संक्षिप्त, चिन्हात्मक रूप में, सामान्य संकेतों का उपयोग करते हुए अभिव्यक्त करना तुलनात्मक रूप से समझने और सम्प्रेषण करने में आसान होता है। ये संकेतकों के निकाय गणित को सुदृढ़ता प्रदान करते हैं और हमें यह जानने में सहायता करता है कि एक गणितीय कथन सत्य और प्रामाणिक है या नहीं?

गणित सटीक है:-

सटीकता गणित की महत्वपूर्ण प्रकृति है। सटीकता का अर्थ है “परिशुद्धता” और “सुस्पष्टता”। आप कोई भी गणितीय अवधारणा ले सकते हैं- उदाहरण के लिए आप शंकु के अवधारणा से परिचित हैं। शंकु की परिभाषा सुस्पष्ट और सटीक है। एक शंकु त्रि-आयामी ज्यामितीय आकार है जो आधार से (जो कि प्रायः समतल और वृत्ताकार होता है) शृंङ्गाकार होते हुए एक बिन्दु तक पहुँचता है जिसे शीर्ष कहते हैं। यदि कोई वस्तु आपको दी जाये तो आप निश्चित रूप से बता सकते हैं कि यह शंकु है या नहीं?



क्रियाकलाप 1

एक शंकवाकार टोस लें और उसका निरीक्षण करें कि उसके कितने वक्र पृष्ठ और समतल पृष्ठ हैं और कितने इसके शीर्ष हैं?

- शंकु का चित्र अपने कार्यों पर बनायें।
- विभिन्न वस्तु जैसे क्रिकेट बॉल, ईट, आइसक्रीम कोन, माचिस की डिब्बी और उनमें से जो शंकवाकार नहीं है उनको पहचान कर अलग करें।

इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात आपने महसूस किया होगा कि शंकु की परिभाषा, आपको शंकवाकार वस्तु तथा जो शंकवाकार वस्तु नहीं है उनमें अंतर स्पष्ट करने में सहायता करती है। शंकु के क्या विशिष्ट गुण हैं यह उसकी परिभाषा से स्पष्ट है। कोई भी व्यक्ति अपने परिवेश की वस्तुओं में से शंकवाकार वस्तुओं को आसानी से पहचान सकता है, क्योंकि शंकु की अवधारणा को सटीकता और सुस्पष्टता के साथ परिभाषित किया गया है। सटीकता गणित की एक महत्वपूर्ण प्रकृति है जो कि सुस्पष्टता और परिशुद्धता से संबंध रखती है और यहाँ पर शंका और अस्पष्टता के लिए कोई भी स्थान नहीं है। C.J. Keyser के अनुसार “गणितीय विचार की विशेषता, निष्कर्ष में निश्चितता, शुद्धता, अवधारणाओं के लक्षणों के कारण है जो सटीकता, पूर्णता और पैनापन से संबंध रखती है। इस प्रकार के विचारों में सटीकता को स्वीकार किया जाता है और कुछ इसे स्वीकार नहीं करते हैं। गणितज्ञ वह है जो सटीकता को अपने विचारों में जगह देता है।” एक अध्यापक के रूप में गणित पढ़ाते, सिखाते समय आपको अपने विद्यार्थियों में इस प्रकार के विशेष गुण विकसित करने के लिए ध्यान केन्द्रित करना होगा। परिशुद्धता और सुस्पष्टता सभी पहलुओं में शुद्धता से संबंध रखता है। गणित विद्यार्थियों में



टिप्पणी

सटीक तर्कशक्ति, सोच और मूल्यांकन करने की योग्यताओं को विकसित करने में सहायता करता है।

यदि आप गणित की तुलना अन्य विषयों के साथ करेंगे तो आप पायेंगे कि उन विषयों में उत्तर तथ्यों का अनुमान लगाकर या प्रत्यक्ष अनुभव के आधार पर लिखा जा सकता है। इस प्रकार उत्तर लिखने में विद्यार्थी के स्वयं के विचार अधिक प्रभावित होते हैं। लेकिन गणित में व्यक्तिगत विचारों और भावनाओं के लिए कोई स्थान नहीं है। गणित अधिगम के दौरान शिक्षार्थी शुद्धता के मूल्यांकन और गुण-विवेचन करना सीखते हैं। वह यह भी सीखता है कि जीवन में समस्याओं को सटीकता के साथ किस प्रकार हल किया जाये और किस प्रकार सटीकता के साथ समस्याओं को परिभाषित किया जाये। गणित शिक्षण-अधिगम के दौरान यह गुण विद्यार्थियों की आदतों में शामिल हो जाता है।

गणित संरचनाओं का अध्ययन है:-

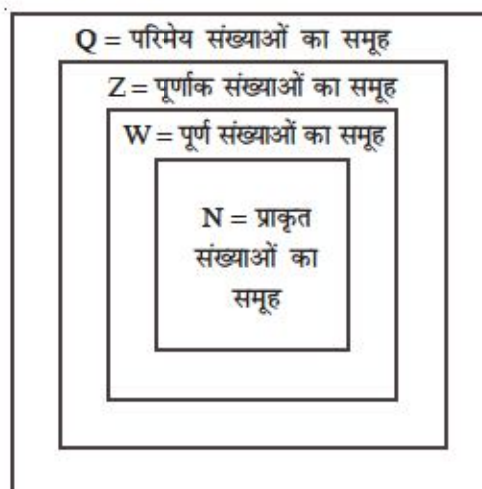
संरचना का अर्थ है- क्रमबद्धता, संघटन, विन्यास, सुव्यवस्थित, रूप या तंत्र या निकाय। क्या गणितीय अवधारणा की कोई निश्चित व्यवस्थापन है? क्या आपने गणितीय अवधारणाओं में किसी विन्यास का अवलोकन किया है? क्या गणित की अवधारणाएँ आपस में सम्बन्धित हैं?

यदि आप गणित की प्रकृति का अवलोकन करेंगे तो आप पायेंगे कि गणित निश्चित संरचनाओं का अध्ययन है। प्राथमिक स्तर के दौरान बच्चा प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक, भिन्नात्मक संख्याओं, परिमेय संख्याओं और वास्तविक संख्याओं के बारे में सीखता है।



क्रियाकलाप 2

पाठ्यपुस्तक का अध्ययन करें और विभिन्न संख्या पद्धतियों की परिभाषाओं को उदाहरण के साथ लिखें। क्या आपने अवलोकन करने पर उनमें कोई संबंध पाया? क्या आप उन्हें चित्र के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं?



चित्र 2.1 : संख्या तंत्र की श्रेणीबद्ध संरचना



अपनी प्रगति को जाचिएँ:

E2 “गणित सटीक और सुरुचिपूर्ण संरचना से संबंध रखता है” क्या आप इस कथन से सहमत हैं? अपने उत्तर के पक्ष में कारण दीजिए।

गणित अमूर्तता की ओर लक्ष्य करता है:-

महेश कक्षा प्रथम में गणित पढ़ा रहे थे- उन्होंने एक क्रियाकलाप का आयोजन कक्षा में कुछ इस प्रकार से किया-

उन्होंने आदमियों की आकृति के दो समूह बनाये जैसे स्त्री और पुरुष। आकृति के दो समूह, कुछ और आकृतियों को समूह से बाहर रखा। उन्होंने इन आकृतियों को विद्यार्थियों को दिया और कहा कि दोनों समूहों में आप इन आकृतियों को रखें। बच्चों ने क्रियाकलाप को पूरा किया। अध्यापक ने उसके पश्चात बच्चों से पूछा कि आपने आकृतियों को दोनों समूहों में किस प्रकार रखा?

इस क्रियाकलाप को आप अपने विद्यालय के विद्यार्थियों के साथ करें और क्रियाकलाप की समाप्ति पर निम्न प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास करें:-

- क्या विद्यार्थी उचित समूह में आकृति को रखने में सफल रहे?
- वह क्या है? जिसके कारण विद्यार्थियों ने इस क्रियाकलाप को सही ढंग से पूरा किया?

सबसे पहले विद्यार्थियों ने एक समूह की आकृतियों में समान गुणों का अवलोकन किया तथा समूह से बाहर की आकृतियों से उन गुणों के आधार पर तुलना किया। यदि समूह की आकृति के गुण अन्य बची आकृतियों से मिलते हैं तो उन्होंने उसे उस समूह में रखा। यह प्रक्रिया अमूर्तता के सिद्धांत पर आधारित है।

गणित अमूर्तता से संबंध रखता है। उदाहरण के लिए आज एक पिता की आयु उसके पुत्र की आयु का दुगुना है। 30 वर्ष पूर्व उनकी आयु उसके पुत्र की आयु की चौगुना थी। पिता की आयु क्या है?

यदि आज पिता की आयु x है, तो आज पुत्र की आयु $x/2$ है। 30 वर्ष पूर्व $(x-30) = 4\left(\frac{x}{2}-30\right)$

हल करने पर $x = 90$

अतः आज पिता की आयु 90 वर्ष और पुत्र की आयु 45 वर्ष हैं।

एक बार प्रसिद्ध गणितज्ञ L. Bers ने कहा कि “गणित की शक्ति अमूर्तता है लेकिन अमूर्तता तभी उपयोगी है जब यह बड़ी संख्या में विशेष स्थितियों को शामिल करता है।”

गणित में अमूर्तता आवश्यक है। यह गणित के आश्चर्यजनक अभिलक्षणों में से एक है। गणित की इस प्रकृति ने गणित के नये क्षेत्रों का विकास किया जैसे बीजगणित। बीजगणित गणित की



टिप्पणी

एक शाखा है जो अमूर्तता से संबंध रखती है (अमूर्त एक अवधारणा, विचार है जो स्थूल वस्तु से उसे अलग बनाता है) अमूर्तता गणित के अनुप्रयोगों के विस्तृत क्षेत्रों को सम्मिलित करने का एक साधन है।

अपनी प्रगति की जाँच करें:-

E3: कक्षा तृतीय के विद्यार्थियों में त्रिभुज की अमूर्त अवधारणा को विकसित करने के लिए उदाहरण दीजिये।

2.3 गणित शिक्षण का महत्व

गणित शिक्षण सामाजिक, आर्थिक, सांस्कृतिक संदर्भों में गणित शिक्षण-अधिगम के सभी स्तरों के सभी पहलुओं से संबंध रखता है इसके साथ ही यह गणित पाठ्यक्रम को विकसित करने से भी संबंध रखता है। गणित का महत्व सैद्धान्तिक और व्यवहारिक दोनों पक्षों में है। गणित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में सहायता करता है साथ ही अन्य विषयों के विकास और विस्तार में गणित का एक महत्वपूर्ण स्थान है।

दैनिक जीवन में गणित के महत्व को ध्यान में रखते हुए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (2005) ने उल्लेख किया है कि विचार की सुस्पष्टता और अभिगृहितों को तार्किक निष्कर्ष तक पहुँचाने के लिए प्रयत्नशील रहना, गणितीय उद्यम का केन्द्र है।

जैसा कि सोचने के कई तरीके हैं लेकिन गणित में सोचने की विधि विद्यार्थी सीखता है यह एक योग्यता है जो उसे अमूर्तों को समझने और गढ़ने तथा समस्याओं को तर्कपूर्ण विवेचन के द्वारा हल करने में सहायता करती है। इस भाग में हम गणित शिक्षा के महत्व के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे।

2.3.1 वास्तविक जीवन परिस्थितियों में गणित

विद्यालय की छुट्टी हो जाने के पश्चात आपने बच्चों को विभिन्न प्रकार के खेल खेलते हुए देखा होगा। फुटबाल टीम के कप्तान अपने टीम के खिलाड़ियों को एक निश्चित क्रम में खड़ा करता है जैसे $5 + 3 + 2$ या $4 + 3 + 3$ । इसी प्रकार यदि क्रिकेट टीम का कप्तान क्षेत्ररक्षण करने के लिए अपने खिलाड़ियों को एक विशेष उपयुक्त स्थान पर खड़े होने के लिए कहता है तो इसका एक प्रमुख कार्य/जिम्मेदारी पूरी हो जाती है। प्रश्न यह है कि क्षेत्ररक्षण के लिए उचित क्रम में खिलाड़ियों को खड़ा करने के लिए किस चीज की आवश्यकता होती है? इसमें सटीक निर्णय लेने की आवश्यकता होती है। कप्तान को खेल और स्थान की सही व सटीक जानकारी होना आवश्यक है। कबड्डी और खो-खो में भी स्थान का सही ढंग से उपयोग करने की समझ व जानकारी होना आवश्यक है।

अपनी प्रगति की जाँच करें।

E4 अपने स्कूल के दिनों में जो खेल आपने खेला उसके बारे में सोचें और उसमें जो गणितीय सिद्धांत लागू हुए उनकी सूची बनाएँ।



आओ एक किसान की स्थिति पर विचार करें। एक किसान खेती के लिए योजना बनाते समय, जमीन का क्षेत्रफल, जिसमें फसल उगानी हैं, बीज की मात्रा, खाद, कीटनाशक की आवश्यकता, कृषि कार्य के लिए मजदूरों की संख्या तथा कृषि की लागत को ध्यान में रखता है। इस प्रकार एक किसान अपने दैनिक क्रियाओं में गणितीय ज्ञान का इस्तेमाल करता है।



क्रियाकलाप-3 :

अपने क्षेत्र के किन्हीं पाँच कार्य करते हुए व्यक्तियों का अवलोकन करें। प्रत्येक कार्य में जो गणितीय सिद्धांत जुड़े हुए हैं उनके बारे में सोचें और अपने विचार अपने दोस्तों के साथ बाँटें।

शायद आप विश्वस्त हो गये होंगे कि गणित जीवन के सभी क्षेत्रों में व्याप्त है। इसी प्रकार बच्चे भी कई प्रकार की क्रियाओं के बारे में जानते हैं। एक क्रियाकलाप निम्न प्रकार से है।

बच्चे इस क्रियाकलाप का अवलोकन कई सप्ताह तक करने के लिए दिन का एक निश्चित समय निर्धारित करते हैं और एक उस समय का भी निर्धारण करते हैं जब उनके कक्षाकक्ष की खिड़की पर सूर्य की रोशनी पड़ती है। उन्होंने खिड़की पर एक 5 सेमी. टेप का टुकड़ा रखा तथा एक 30 सेमी. टेप का टुकड़ा उसके सामने रखा ताकि 5 सेमी. टुकड़े की छाया 30 सेमी. टुकड़े के बीच में पड़े उसके पश्चात प्रत्येक दिन बच्चे उस निश्चित समय को रिकार्ड करते हैं जब 5 सेमी. टेप के टुकड़े की परछाई 30 सेमी. टेप के ऊपर पड़ती है। इस समय को वे ग्राफ पेपर पर अंकित करते हैं। कुछ दिनों पश्चात् बच्चे छाया का अवलोकन किये बिना ही ग्राफ पेपर पर उस समय को अंकित कर लेते हैं जब छाया 30 सेमी. टेप के टुकड़े पर पड़ती है।

यहाँ पर कई प्रश्न मस्तिष्क में उभरते हैं:

- बच्चों ने समय का चुनाव कैसे किया?
- क्या एक ही समय पर छाया 30 सेमी. टेप के टुकड़े पर प्रतिदिन पड़ती है?
- कुछ दिनों के अवलोकन के पश्चात् बच्चों ने ग्राफ पेपर पर समय कैसे अंकित कर लिया?

उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर देने के लिए आपके पास गणित की समझ होनी चाहिए। प्रथम प्रश्न का उत्तर देने के लिए मापन की अवधारणा की आवश्यकता है। इसी प्रकार तीसरे प्रश्न के उत्तर के लिए आपको अपने अनुभव का इस्तेमाल करना होगा। आपको प्रतिदिन ध्यानपूर्वक अवलोकन करके समय को रिकार्ड करना होगा। आँकड़ों के आधार पर आप आने वाले कई दिनों के लिए समय का पूर्वानुमान लगा सकते हैं। आप अनुमान का सहारा लेकर जाँच सकते हैं और आँकड़ों की सहायता ले सकते हैं या अनुमानों का अन्य समूह भी ले सकते हैं।

उदाहरण से हम कह सकते हैं कि गणित सिर्फ कक्षा कक्ष तक ही सीमित नहीं है वरन् गणित को हम अपने आसपास के परिवेश में हर जगह देख सकते हैं।



टिप्पणी

2.3.2 गणित और ज्ञान की अन्य शाखायें

गणित को, भाषा के साथ, मानव को सीखने के लिए और सभ्यता के लिए, आधारभूत और आवश्यक समझा जाता है। मानव ज्ञान का ऐसा कोई क्षेत्र नहीं है जो गणित के प्रभाव से अछूता हो।

संख्याओं, गणितीय आकृतियों, सूत्रों और प्रक्रियाओं के अतिरिक्त, गणित ने ज्ञान के अन्य क्षेत्रों के प्रस्तुतिकरण और संप्रेषण को, संबद्धता और गणितीय सटीकता के साथ, प्रभावित किया है। इस भाग में हम गणित के, ज्ञान के विभिन्न शाखाओं पर प्रभाव की चर्चा करेंगे। विशेषकर उन क्षेत्रों की जिन्हें प्राथमिक कक्षाओं के गणित पाठ्यक्रम में शामिल किया गया है। हमें यह ध्यान रखना है कि उच्च स्तरीय शिक्षा में गणित का विभिन्न शाखाओं और विषयों में प्रभाव अधिक प्रबल है।

गणित और साहित्य:-

बहुत लोग भाषा और साहित्य की प्रकृति को गणित की प्रकृति से बिलकुल विपरीत मानते हैं। वे मानते हैं कि भाषा भावनाओं, अहसासों और भावावेश की व्यवस्था करने का साधन है जबकि गणित भावनाओं, भावावेश से रहित है तथा सटीक, गणितीय तर्कों, वस्तुपरक से भरपूर है और इनका साहित्य में कोई स्थान नहीं है।

परंतु शेक्सपीयर के शब्दों में संक्षिप्तता ज्ञान की आत्मा है। संक्षिप्त और सटीक अभिव्यक्ति, बुद्धिमत्ता की निशानी समझा जाता है। कम शब्दों के साथ यदि आप अधिक अभिव्यक्त कर सकते हैं तो आप अधिक संतुलित और ध्यानकेन्द्रित, अर्थपूर्ण ढंग से संप्रेषण करने की योग्यता रखते हैं और वास्तव में यही गणितीय तर्क है।

प्रारंभिक अवस्था में भाषा सीखते समय बच्चों को अपने आपको अभिव्यक्ति करने के लिए अधिक से अधिक शब्दों का इस्तेमाल करने की स्वतंत्रता दी जाती है। लेकिन प्रत्येक स्तर पर आप उनके शब्दों के ज्ञान प्राप्ति के अवसर को सुनिश्चित करें और प्राथमिक स्तर के कक्षाओं की समाप्ति पर उनके पास लगभग 5000 शब्दों का भंडार होना चाहिए। अर्जित शब्दावली के सतत आंकलन करने के लिए आपको वस्तुनिष्ठ विधि का इस्तेमाल करने की आवश्यकता है। उच्च प्राथमिक कक्षाओं में बच्चों को निर्धारित शब्द संख्या में ही अभिव्यक्ति करने के लिए उत्साहित किया जाता है अर्थात् उनको सटीक, और व्यापक रूप से अभिव्यक्त करने के लिए उत्साहित किया जाता है।

कविता लिखते समय लाइनों की लंबाई का विशेष ध्यान करके चुनाव किया जाता है और पूरी कविता लिखने के दौरान व्यवस्थित रूप से इस प्रक्रिया का अनुसरण किया जाता है। यह कविता के लय और भाव को कायम रखता है और अर्थ को अभिव्यक्त करता है। इन सबमें गणित व्याप्त है और साहित्य के भाव व संरचना को नियंत्रित करता है।



गणित और विज्ञान

शायद गणित और विज्ञान सबसे घनिष्ठ संबंध रखते हैं। विज्ञान की ऐसी कोई शाखा नहीं है जिसमें गणित का इस्तेमाल नहीं किया जाता हो। भौतिक विज्ञान की अवधारणा को ही ले लीजिए, ज्यादातर अवधारणायें प्रयोगात्मक क्रियाओं या अवलोकन के द्वारा विकसित हुए हैं लेकिन गणितीय व्याख्या के इस्तेमाल के द्वारा वैज्ञानिक सिद्धांतों के रूप में स्थापित किया गया है। उदाहरण के लिए पानी 100°C पर उबलता है। यह एक वैज्ञानिक तथ्य है जो प्रयोगों के द्वारा उत्पन्न हुआ है। लेकिन अन्य प्रयोग इसे वायुदाब से जोड़ते हैं। अर्थात् वायुदाब बढ़ने से पानी का क्वथनांक भी बढ़ता है और वायुदाब के घटने से पानी का क्वथनांक भी कम हो जाता है। इस भौतिक घटना को स्पष्ट रूप से समझने के लिए वायुदाब और क्वथनांक के बीच एक संबंध की आवश्यकता है ताकि इससे पानी के क्वथनांक की जानकारी एक निश्चित वायुमंडलीय दाब पर प्राप्त की जा सके। यह गणितीय विधियों के द्वारा ही संभव है। भौतिक विज्ञान के सभी क्षेत्रों, जैसे यांत्रिकी प्रकाश, ध्वनि, रासायनिक क्रियाओं की व्याख्या करने में गणित एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है।

जानवरों और पेड़ पौधों के विकास की गति को निर्धारित करना, विभिन्न पेड़ पौधों के पत्तों की क्रमबद्धता, हृदय की धड़कनों की दर और रक्त दाब का मापन आदि जीव विज्ञान में गणित के इस्तेमाल के कुछ उदाहरण हैं।

विज्ञान के उन सभी क्षेत्रों को सूचीबद्ध करना कठिन है जहाँ पर गणितीय ज्ञान के माध्यम से अवधारणाओं को समझा जाता है। वास्तविकता यह है कि विज्ञान की शायद ही ऐसी कोई शाखा हो जहाँ गणित की आवश्यकता नहीं होती है।

क्रियाकलाप 4

उच्च प्राथमिक कक्षाओं के विज्ञान पाठ्यक्रम (एक भौतिक विज्ञान से तथा एक जीव विज्ञान से) कोई दो पाठों को लें तथा उस गणितीय ज्ञान की सूची बनाये जिसकी आवश्यकता पाठ में शामिल अवधारणाओं को समझने में पड़ती है।

गणित और पर्यावरण अध्ययन:-

प्राथमिक कक्षाओं के पर्यावरण अध्ययन के पाठ्यक्रम में ऐसी कई विषयवस्तु हैं जहाँ पर मात्रात्मक विवरण और विश्लेषण की आवश्यकता पड़ती है और ये मात्रात्मक आंकड़ों पर आधारित होते हैं। इस तरह के कुछ उदाहरण - विद्यालय परिसर, जिसमें बगीचा भी शामिल हैं, बनाने की योजना में क्षेत्रफल और लंबाई के मापन की अवधारणा की आवश्यकता होती है। इस प्रकार साफ कक्षा कक्ष के वातावरण का सौंदर्यीकरण करने के लिए सममिति की अवधारणा के साथ-साथ मापन कौशल की भी आवश्यकता होती है। आपको विद्यालय परिसर के भीतर के और उसके आसपास के इलाके के जैविक कूड़ा और अन्य प्रकार के कूड़े का निपटारा करने के लिए एक उचित कूड़ा निपटान निकाय बनाने के लिए आपको अनुपात और समानुपात के ज्ञान को इस्तेमाल करने की आवश्यकता होगी।



टिप्पणी

संतुलित और पौष्टिक आहार के लिए, भोजन के विभिन्न अवयवों के अनुपात को, व्यक्तिगत आवश्यकता के आधार पर, गणितीय रूप से अभिकलन किया जाता है। यदि एक बच्चे का वजन कम है और जल्दी ही संक्रमण से ग्रसित हो जाता है तो उसकी खुराक में विटामिनों, प्रोटीनों की मात्रा बढ़ा दी जाती है और वृद्धि की मात्रा इन तत्वों की कमी के अंश के अभिकलन के ऊपर निर्भर करता है। इसी प्रकार एक मोटे बच्चे को कम कार्बोहाइड्रेट और कम वसा वाले भोजन की आवश्यकता होती है जिसे उसके भोजन विशेषज्ञ के द्वारा अभिकलन किया जाता है।

विद्यालय के आसपास रहने वाले लोगों के व्यावसायिक प्रतिरूपों का अध्ययन करने के लिए आपको अनुपात प्रतिशत, और विभिन्न प्रकार के ग्राफीय प्रस्तुतिकरण के ज्ञान की आवश्यकता होगी जिसके आधार पर आप प्रतिरूपों की व्याख्या कर पायेंगे।

गणित और भूगोल:-

विज्ञान की तरह भूगोल में भी भौगोलिक अवधारणाओं और घटनाओं को स्पष्ट और व्याख्या करने के लिए प्रत्येक चरण पर गणित के ज्ञान की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए भूमि की बनावटों का अध्ययन के लिए आपको ऊँचाई वाले स्थानों की मापन का स्पष्ट ज्ञान और विभिन्न ऊँचाई पर तापमानों के बदलाव का भी ज्ञान होना चाहिए। किसी स्थान के तापमान, आर्द्रता और वर्षा का अभिकलन करने में, उनके सूचकों को ग्राफ में अंकित करने के लिए और उनके आपसी संबंधों का निर्धारण करने के लिए उनके समतुल्य गणितीय अवधारणाओं का ज्ञान आवश्यक है। त्रिकोणमिति एक पर्वत की ऊँचाई ज्ञात करने में सहायता करता है।

इसी प्रकार, किसी स्थान का अक्षांश और देशांश निर्धारित करने के लिए और मानचित्र बनाने के लिए समतल और ठोस ज्यामिति की जानकारी होना अति आवश्यक है।

गणित और इतिहास:-

इतिहास एक निश्चित समयावधि में घटित घटनाओं और घटनाचक्रों के बारे में अध्ययन करता है। इसलिए आपको समय का विशेष ध्यान रखना होगा तथा आपको महत्वपूर्ण घटनाओं के बीच जो समयान्तर है उसके बारे में कल्पना की करने के योग्य होना चाहिए ताकि आप प्रभावकारी ढंग से इस प्रकार की घटनाओं के घटित होने की प्रमाणिकता के बारे में अनुमान लगा सकें। इसके अतिरिक्त भूतकाल की घटनाओं की आज के संदर्भ में क्या प्रासंगिकता है इसका अध्ययन करने के लिए आपको एक समय रेखा खींच कर घटनाओं के समय निर्धारण करने की आवश्यकता होगी। इतिहास के इन सब क्रियाकलापों को समझने के लिए आपको समय अंतराल और त्वरित समय के मापन का ज्ञान होना आवश्यक है।

विभिन्न समयों पर भिन्न-भिन्न क्षेत्रों के ऐतिहासिक मानचित्र बनाने और समझने के लिए तथा सामाजिक ऐतिहासिक घटनाओं का चित्रांकित प्रदर्शन करने के लिए आपको ज्यामिति कक्षाओं में सीखे हुए समय स्थानिक का पर्याप्त ज्ञान होना आवश्यक है।



गणित और कला शिक्षा:

संगीतकला, नाट्यकला, नृत्यकला, दृश्य एवं श्रव्य कला में गणित का एक महत्वपूर्ण योगदान है। दृश्य कला जैसे पेंटिंग, रेखाचित्र, मूर्तिकला में अनुपात का विशेष ध्यान रखना आवश्यक है, उदाहरण के लिए सिर, धड़, हाथ और पैरों के मध्य समानुपात बनाये रखना आवश्यक है अन्यथा कलाकृति विकृत नजर आयेगी और उसकी कलात्मकता खत्म हो जायेगी। इसलिए प्रत्येक कलाकार या मूर्तिकार को मूर्ति बनाने या पेंट करने से पहले, रेखाकृति तैयार करके यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि जो पेन्ट या मूर्ति बनाने चाहते हैं वो सही अनुपात में पेंट हो या मूर्ति गढ़ी हुई हो ताकि कलाकृति को अंतिम रूप देने में कलात्मकता को बनाया रखा जा सके। यदि आप अपने विद्यार्थियों को रेखांकन, पेंट या मिट्टी का मॉडल बनाने के लिए उत्साहित कर रहे हैं तो उन्हें पहले से ही अनुपात में इनका रेखाचित्र बनाने के लिए आवश्यक जानकारी उपलब्ध करायें और इसका अभ्यास करायें ताकि पेन्ट या मिट्टी के मॉडल के विभिन्न भाग सही अनुपात में बनाये जा सकें।

प्रदर्शन कला में चाहे वह गायन, वादन, या नृत्य हो, लय और ताल का ज्ञान होना अत्यंत आवश्यक है। प्रत्येक राग गाने में या कोई वाद्य यंत्र (सितार या बांसुरी) बजाने में एक निश्चित ताल अंतराल का संगम होता है। इस ताल में सूक्ष्म परिवर्तन करने से स्वर विकृत हो सकता है और संगीत कर्कश हो जाता है। संगीत नोट जिसे संगीतमय चिन्हों संकेतों में लिखा जाता है, चित्रित ग्राफ की तरह दिखायी देता है। इन संगीतमय संकेतकों को एक निश्चित क्रम व दूरी में चिन्हित किया जाता है जो यह दर्शाता है कि दो लगातार नोट के बीच में कितना निश्चित समय अंतराल होना चाहिए। प्रारंभिक स्तर पर विद्यार्थियों को लय और तान के बदलाव को ताल को गिनकर अहसास दिलाया जाता है ताकि विद्यार्थियों को इस बदलाव को महसूस करने की आदत पड़ जाये। इसी प्रकार विभिन्न नृत्यकला में लय को बनाये रखने के लिए मौखिक रूप से ताल को गिना जाता है उसके पश्चात ढोल, तबला को बजाकर ताल वलयू को बनाये रखा जाता है। तान में परिवर्तन और ताल में परिवर्तन के अंतर को लयात्मक परिवर्तन के माध्यम से जानना आवश्यक है।

एक सफल कलाकार बनना चाहते हैं तो आपको कला के प्रकृति और उससे जुड़े गणितीय सिद्धांतों के बीच के संबंध को स्पष्ट रूप से समझना होगा।

गणित और शारीरिक शिक्षा:-

जहाँ कहीं भी आप क्रमबद्धता बनाये रखना चाहते हैं तो आपको संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है और शारीरिक शिक्षा इसका एक अच्छा उदाहरण है। चाहे ड्रिल हो या व्यक्तिगत योग क्रिया या एरोबिक व्यायाम कर रहे हों तो आप संख्याओं का इस्तेमाल करते हैं। कोई भी खेल खेलते हैं या प्रत्येक खेल स्पर्धा की रणनीति बनाते हैं तो उसमें गणितीय विशेषज्ञता की आवश्यकता होती है और अब इसे खेल के कोच और ट्रेनर की प्रशिक्षणों में शामिल किया जा रहा है।



टिप्पणी

2.3.3 गणित और समस्या समाधान

एन.जे.फाइन के अनुसार “एक समस्या जिसे प्रस्तुत किया गया है एक चौकी को प्रदर्शित करता जहां एक साधारण युद्ध के द्वारा अज्ञात को जीतने के पश्चात पहुँचना है।” गणित अग्रगामी है। गणित केवल पहले से प्राप्त किये गये ज्ञान पर विचार न करके गणित अनसुलझे समस्याओं को हल करने नये शक्तिशाली अवधारणाओं और विधियों का सृजन करने में, ज्यादा बल देता है।

इस प्रकार गणित सीखना और विद्यार्थियों में समस्या समाधान करने की योग्यता विकसित करना लगभग समानार्थी है। ज्यादातर साहित्यों में गणितीय समस्या समाधान का इस्तेमाल, शब्दों की समस्या को हल करने में कहीं ज्यादा किया जाता है। George Polya ने अपनी किताब *Mathematical Discovery* (गणितीय खोज) में समस्या समाधान को कुछ इस प्रकार से परिभाषित किया है कि समस्या समाधान एक सचेतन खोज है उस उचित क्रिया की जो सुस्पष्ट, सुविचारित लक्ष्य को प्राप्त करने के लिए हो, परंतु शीघ्रता से प्राप्त करने योग्य लक्ष्य न हो।

विद्यार्थी की समस्या समाधान करने की योग्यता गणितीय ज्ञानार्जन पर निर्भर करता है। बच्चे की दिन प्रतिदिन की समस्याओं को हल करने के लिए तैयार करने में समस्या समाधान एक प्रभावकारी दिग्दर्शक के रूप में उपयोगी है। आओ एक उदाहरण पर विचार करें।

एक मौखिक प्रश्न निम्न प्रकार से है-

मोहन ने टाफी के 8 डिब्बे और गौरी ने 3 डिब्बे बेचे। गौरी कितने डिब्बे और बेचे ताकि वह मोहन के बराबर डिब्बे बेच सके।

इस प्रकार की समस्या को गणितीय ज्ञान के द्वारा हल किया जा सकता है। यदि बच्चा इस समस्या में इस्तेमाल की गई भाषा से तथा इसमें इस्तेमाल होने वाली गणितीय संक्रियाओं से परिचित है तो वह इस समस्या का तथा इसी प्रकार की अन्य समस्याओं का हल निकाल सकता है। आओ अब समस्या समाधान की प्रक्रिया के बारे में चर्चा करें।

यदि विद्यार्थी को उचित अनुभव प्रदान किये जायें तो बच्चे समस्या समाधान की प्रक्रिया सीख सकते हैं।

- प्रथम, समस्या कुछ अमूर्त अवधारणा होने चाहिए और बच्चा उसमें दिये गये आँकड़ों के बीच में संबंध स्थापित करने योग्य।
- द्वितीय, समस्या को हल करने के लिए कई चरणों की आवश्यकता होती है। इससे बच्चों को हल के बारे में व्यवस्था करने, सोचने, विचार करने में और रिकार्ड करने में सहायता मिलती है।
- तृतीय, आदर्श समस्या के एक उत्तर होने के बजाय कई संभावित उत्तर होते हैं। बच्चों को उन उत्तरों को खोजने के लिए आज्ञा दी जानी चाहिए।



- चतुर्थ-समस्या में सूचनाओं का विश्लेषण और संयोजन करने की आवश्यकता होती है। कठिन समस्याएँ जीवन से संबंधित समस्याओं को हल करने में सहायता करती हैं।

प्रक्रियाएँ जैसे अवलोकन, अनुमान लगाना, तुलना करना, प्रतिरूपों को कापी करना, जाँच और त्रुटि का उपयोग, आँकड़ों व वस्तुओं का वर्गीकरण और उचित रणनीति का उपयोग समस्या समाधान में शामिल हैं। इन प्रक्रियाओं को गणित अधिगम के द्वारा विकसित किया जा सकता है। अतः गणित सीखना न केवल गणितीय समस्याओं को हल करने के लिए आवश्यक है बल्कि गणित सीखना दैनिक जीवन की समस्याओं को भी हल करने के लिए आवश्यक है।

2.3.4 गणितीय सोच की योग्यता

विद्यार्थी की गणितीय सोच की योग्यता समझने के लिए आओ एक समस्या का अवलोकन करते हैं, उदाहरण के लिए दो प्राकृत संख्याओं के लघुत्तम और महत्तम समापवर्त्य के बीच के संबंध ज्ञात करना।

इस समस्या में दो प्राकृत संख्याओं के HCF व LCM के बीच क्या संबंध है उसे ज्ञात करना है? आप इस समस्या को कैसे हल करेंगे? क्या आप प्राकृत संख्याओं के कुछ युग्म को लेकर उनके HCF और LCM के बीच के संबंधों का अध्ययन करना चाहते हैं? यदि आप ऐसा कर रहे हैं तो आप विशिष्टीकरण कर रहे हैं।

संख्या युग्म	HCF	LCM	विवरण
(4,6)	2	12	
(3,8)	1	24	
(6,6)	6	6	
(3,7)	1	21	

क्या आप किसी प्रतिरूप का अवलोकन कर रहे हैं? क्या आप कोई नियम का अनुमान लगाने में (या उचित Guess लगाने में) इसे सहायक मानते हैं? सामान्य नियम क्या हैं? क्या LCM, HCF से हमेशा बड़ा होता है? क्या दो संख्याओं का HCF दोनों संख्याओं के बराबर या कम होता है?

आपको अपने सामान्यीकरण को जाँचने की आवश्यकता है। इसका अर्थ है कि आपको अपने अनुमान को सिद्ध करने की आवश्यकता है।

चार्ट का अवलोकन करके, आप निम्नलिखित सामान्य नियम तक पहुँच सकते हैं। आपको निश्चित अभिगृहीत से शुरू करना होगा और चरणबद्ध तरीके से परिणाम तक पहुँचना होगा।

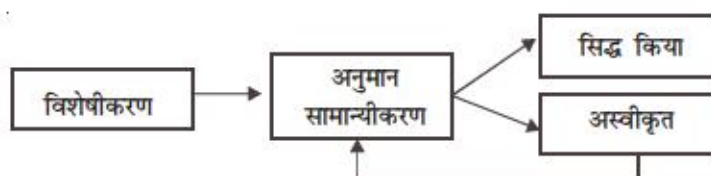
- दो संख्याओं का HCF दोनों संख्याओं से या तो कम होगा या उनके बराबर होगा, लेकिन दोनों संख्याओं से बड़ा नहीं होना चाहिए।



टिप्पणी

- दो अभाज्य संख्याओं का HCF सदैव 1 और उनका LCM दोनों संख्याओं का गुणनफल होता है।
- दो संख्याओं का गुणनफल उनके HCF और LCM के गुणनफल के बराबर होता है। क्या आप कोई और सामान्य नियम, चार्ट से बता कर सकते हैं?

अब आप जानने को उत्सुक होंगे कि क्या यह नियम तीन भिन्न संख्याओं पर भी लागू होगा? क्या यह नियम 10000 से अधिक संख्याओं पर भी लागू होगा? इस तरह से आप एक समस्या का निर्माण कर रहे हैं। एक बार समस्या निर्माण करने पर आप उसे अपने अनुमान के द्वारा जाँच करके सिद्ध कर सकते हैं। यदि आप इसे सिद्ध नहीं कर सकते हैं तो आप वापस जायें और अपने अनुमान में सुधार करें सामान्यीकरण में सुधार करें और पुनः सिद्ध करें अन्यथा इसे अस्वीकार करें। इस प्रकार से समस्या निर्माण और समस्या समाधान में गणितीय सोच का प्रवाह चार्ट निम्नांकित हैं।



चित्र 2.2: गणितीय सोच

गणितीय सोच को प्रसिद्ध गणितज्ञ H.Weyl ने कुछ इस तरह से व्यक्त किया है "गणितीय सोच से मेरा अर्थ उस तर्क रूप से है जिसके द्वारा गणित बाह्य जगत के विज्ञानों में व्याप्त हो जाता है और यहाँ तक कि मानवीय संबंधों के बारे में प्रतिदिन के विचारों में भी व्याप्त हो जाता है।" अतः मानसिक योग्यता जैसे सटीकता से सोचना, स्पष्ट रूप से व्यक्त करना, तार्किक रूप से सोचना, व्यवस्थित रूप से सोचना और प्रतिरूपों से सामान्यीकरण करना हमारे वास्तविक जीवन की स्थितियों में अत्यधिक सहायता करता है। ये सब गणितीय सोच की प्रक्रिया है।

गणित अधिगम साधन और साध्य दोनों के रूप में कार्य करता है। यह तार्किक और मात्रात्मक ढंग से सोचने की योग्यता विकसित करता है। प्रारंभिक कक्षाओं में गणित अधिगम बच्चों के भीतर से स्वयं उत्पन्न होना चाहिए। इस प्रकार के अनुभव रूचिकर और उनकी कल्पनाओं को चुनौती करने वाला होना चाहिए ताकि कोई प्राकृतिक घटना का अवलोकन करते समय वे गणितीय ढंग से सोच सकें। अंतर्ज्ञान और चिंतनात्मक विचार विद्यार्थियों में गणितीय सोच को विकसित करता है। अंतर्ज्ञानात्मक विचार का अर्थ है स्थूल वस्तु के साथ प्रयोग के द्वारा सीखना, स्थूल तरीके से विभिन्न विचारों के अनुभव के द्वारा और विश्लेषणात्मक विचार प्रक्रिया के आधार पर विचारों के दृष्टिगोचर के द्वारा सीखना परंतु चिंतनात्मक विचार बाद में आता है। चिंतनशील विचार का अर्थ है स्थूल वस्तुओं के बिना विचारों के साथ तर्क करने के योग्य होना। चिंतनशीलता की प्रक्रिया में खोज करना, कल्पना करना, विचारों से संबंध रखना समस्या समाधान, सिद्धांत निर्माण और सामान्यीकरण शामिल हैं।



अपनी प्रगति की जाँच करें।

E5 अंतर्ज्ञानात्मक और चिंतनात्मक विचार का उदाहरण दीजिये? ये गणितीय सोच में किस तरह सहायता करते हैं?

टिप्पणी

2.4 सारांश

- गणितीय कथनों को सिद्ध करने में।
- सटीकता गणित की प्रकृति है जो शुद्ध से संबंध रखता है और इसमें शंका और संदिग्धता के लिए कोई स्थान नहीं है।
- गणितीय संरचना सटीक और सौष्ठव होती है। गणित विद्यार्थियों को सटीक कथन निर्माण करने के योग्य बनाता है।
- गणितीय समस्या को हल करने की प्रक्रिया में परिशुद्धता और विधि तथा परिणाम में परिशुद्धता गणित की प्रकृतियों में से एक है।
- गणित अधिगम अमूर्तन को लक्ष्य करता है, अमूर्तता वह योग्यता है जो वर्गीकृत वस्तुओं के समूह को देखता है और कार्य योजना की पहचान करता है जिसके द्वारा वर्गीकरण को पूरा किया जाता है।
- मानव जीवन की सभी क्रियाकलापों में गणित का उपयोग होता है तथा जीवन के सभी क्षेत्रों में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है।
- एक गणितीय कथन को प्रमाणित करने के लिए आपको इसे सभी स्थितियों के लिए भी सिद्ध करने की आवश्यकता है। यदि कोई एक स्थिति के लिए यह सत्य नहीं है तो यह सभी स्थितियों के लिए भी सत्य नहीं है।
- गणितीय सोच, समस्या समाधान और समस्या निर्माण से बना होता है। गणितीय सोच में सटीक चिंतन और तार्किक विवेचना कौशल की आवश्यकता होती है।
- गणितीय ज्ञान दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने योग्य बनाता है। विभिन्न प्रक्रियाओं जैसे अवलोकन, अनुमान लगाना, तुलना करना, वस्तुओं के प्रतिरूपों की कापी करना, जाँच और त्रुटि का उपयोग, आंकड़ों व वस्तुओं का वर्गीकरण और उचित रणनीतियों का इस्तेमाल करना, गणित अधिगम के द्वारा विकसित किया जा सकता है।

2.5 आपकी प्रगति की जाँच के लिए आदर्श उत्तर

E1 निगमनात्मक तर्क

E2 हाँ, गणित अध्ययन के द्वारा लिखित या मौखित अभिव्यक्ति में स्पष्टता, संक्षिप्तता, शुद्धता और सटीकता की आदत का निर्माण और आदत को सुदृढ़ किया जाता है।



टिप्पणी

- E3 बच्चे को ड्राइंग शीट से बनी बहुत सी त्रिभुज दें, तथा बच्चे से प्रत्येक मॉडल की व्याख्या करने के लिए कहें। बच्चे को त्रिभुजों के गुणों को पहचानने के लिए प्रेरित करें। बच्चा त्रिभुज के आकार, भुजाओं की संख्याओं, कोणों की संख्या और शीर्षों के संख्या के आधार पर कर सकता है। इसके बाद बच्चे से मॉडल वापस ले लें। अब बच्चे को त्रिभुज का रेखाचित्र बनाकर उसे वर्णन करने के लिए कहें।
- E4 पाठ्यपुस्तक में दिये गये उदाहरण के अनुसार उत्तर लिखा जा सकता है।
- E5 माना बच्चे को 18 और 17 को जोड़ने के लिए कहा जाता है। बच्चे ने 18 छड़ी ली तथा 10 छड़ी का एक बंडल तथा 8 छड़ी को खुला रखा उसके पश्चात उसने 17 छड़ी ली और 10 छड़ी का एक बंडल और 7 छड़ी को खुला रखा। अब उसके पास 2 बंडल और 15 छड़ी खुली हुई बची। बच्चे ने पुनः 15 छड़ी में से 10 छड़ी का एक बंडल बनाया और 5 छड़ी खुली रखी। अब उसके पास 10 छड़ी वाले 3 बंडल और 5 छड़ी खुली थी। अतः कुल छड़ी 35 हुई। इस चिंतन की प्रक्रिया में अंतर्ज्ञानात्मक विचार शामिल था। इसके दूसरे तरफ, जब बच्चा स्थूल वस्तुओं का इस्तेमाल किये बिना संख्याओं को जोड़ता है तो वह चिंतनात्मक विचार प्रक्रिया का उपयोग करता है सीखने की प्रारंभिक अवस्था में अंतर्ज्ञानात्मक विचार की अवधारणा बहुत उपयोगी होती है। परंतु जब बच्चा प्रक्रियाओं से परिचित हो जाता है तब चिंतनात्मक विचार की प्रक्रिया आरंभ होती है।

2.6 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

NCERT (2008) Source Book on assessment for classes I-V: mathematics New Delhi: NCERT. NCERT (2005) National Curriculum framework 2005 New Delhi: NCERT

Cruikshank D.E. Fitzgerald, D.L. Jenson L.R. (1941) Young Children learning mathematics BOSTON

CBSE (2010): Continuous and comprehensive Evaluation: Manual for teachers of classes VI to VII New Delhi: CBSE

IGNOU (1997) Teaching of Primary School Mathematics: Block I-Aspects of teaching Mathematics, New Delhi: IGNOU

2.7 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1. 'गणित तार्किक है' प्राथमिक कक्षाओं में गणित शिक्षण में गणित के इस प्रकृति का इस्तेमाल आप कैसे करेंगे?
2. गणित संरचनाओं का अध्ययन है। कैसे?
3. गणित शिक्षा गणितीय सोच कौशल विकसित करने के लिए महत्वपूर्ण है। उदाहरण दीजिये।



इकाई-3 गणित शिक्षा के उद्देश्य एवं परिप्रेक्ष्य

संरचना

3.0 प्रस्तावना

3.1 अधिगम उद्देश्य

3.2 गणित शिक्षा के उद्देश्य

3.2.1 विस्तृत एवं संक्षिप्त उद्देश्य

3.2.2 विशिष्ट उद्देश्य

3.3 विद्यालय गणित के लिए दृष्टि

3.3.1 बच्चे और गणित शिक्षा

3.3.2 कक्षा-कक्ष के बाहर गणित शिक्षा

3.3.3 गणितीय अधिगम को रुचिपूर्ण बनाना

3.3.4 गणितीयकरण के लिए वांछनीय अधिगम वातावरण का सृजन

3.4 सारांश

3.5 आपकी प्रगति की जाँच के लिए आदर्श उत्तर

3.6 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

3.7 अन्त्य-इकाई अभ्यास

3.0 परिचय

विश्व की प्राचीन एवं वर्तमान सभी सभ्यताओं में गणित का एक महत्वपूर्ण स्थान रहा है। जैसा कि पूर्व की इकाईयों में चर्चा की गयी है कि गणित जीवन के सभी क्षेत्रों में तथा ज्ञान की सभी शाखाओं में विद्यमान है। विज्ञान एवं तकनीकी में विकास एवं नवीनता, विश्व के लिए गणित का एक महत्वपूर्ण योगदान, असाधारण बदलाव लाने का मुख्य कारक है। गणितीय प्रयोगों पर आधारित है। ऐसा लगता है कि सम्पूर्ण विश्व की रचना बहुत अधिक गणितीय रूप में की गई है, इसीलिए एक प्रसिद्ध ब्रिटिश खगोल विज्ञानी सर जेम्स जीन्स ने कहा था कि "ईश्वर एक सर्वोच्च गणितज्ञ है जिसने क्रमबद्ध और व्यवस्थित ब्रह्मांड की संरचना की।"



टिप्पणी

गणित यद्यपि सभी क्षेत्रों में विद्यमान है इसके बावजूद इसकी अमूर्तता की वजह से गणित को बच्चे एक कठिन विषय मानते हैं। तथा हममें से अधिकांश लोग गणित को आम आदमी की समझ से परे का कठिन विषय मानते हैं। अधिकतर छात्र एवं कुछ अध्यापक भी गणित विषय से डरते हैं तथा इसमें संदेह नहीं कि आगे चलकर उनमें गणित के प्रति एक भय उत्पन्न हो जाता है।

आप गणित के प्रति भय एवं चिंता के बारे में इकाई एक में की जा चुकी चर्चा में सीख चुके हैं। कुछ अध्यापक जिन्हें गणितीय अवधारणा एवं प्रक्रियाओं को समझने में कठिनाई आती है वे अपने छात्रों के मस्तिष्क में भी अपनी गणितीय उलझनों की छाप छोड़ देते हैं।

बच्चों को गणित शिक्षण कराते समय हमारे मस्तिष्क में बहुत से प्रश्न उत्पन्न होते हैं जैसे गणित जैसे कठिन विषय को क्यों सीखा जाये। गणित जैसे अमूर्त विषय के साथ इसके चिह्न, तर्क और पद्धति हमारे दैनिक जीवन में कैसे सहायक हो सकते हैं? गणित अधिगम की त्वरित प्राप्ति क्या है? क्या गणित शिक्षण एवं अधिगम रूचिपूर्ण हो सकता है? इन प्रश्नों और इसी तरह के अन्य और प्रश्नों का उत्तर हमें गणित अधिगम के प्रति एक स्पष्ट दृष्टिकोण का विकास करने में सहायक और हमारे लिए गणित के प्रति असामान्य डर एवं भय को दूर करने में सहायक सिद्ध होगा।

इस इकाई में विद्यालय के प्रारम्भिक स्तर पर शिक्षण एवं अधिगम गणित के विस्तृत एवं विशिष्ट उद्देश्यों और उद्देश्यों की चर्चा के द्वारा हम गणित के उचित परिदृश्य को विकसित करने का प्रयास करेंगे।

इस इकाई को पूरा करने के लिए आपको सात (7) घंटे अध्ययन की आवश्यकता होगी।

3.1 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि आप—

- गणित शिक्षा के विस्तृत एवं संक्षिप्त, शिक्षण एवं अधिगम उद्देश्यों को स्पष्ट रूप से परिभाषित कर सकेंगे।
- प्रभावकारी गणित शिक्षा के सूचकों की पहचान कर सकेंगे।
- विद्यालय में गणितीयकरण के लिए उचित अधिगम वातावरण का सृजन कर सकेंगे।

3.2 गणित शिक्षा के उद्देश्य


गणित शिक्षा के अपने उद्देश्य है। डेविड व्हीलर के अनुसार “ज्यादा गणित जानने की अपेक्षा कैसे गणितीयकरण किया जाये यह अधिक उपयोगी है।” राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा-2005 के अनुसार “गणितीयकरण के लिए छात्रों की योग्यता को विकसित करना ही गणित शिक्षा



का मुख्य उद्देश्य है।" जार्ज पोल्या के अनुसार-विद्यालयी शिक्षा के लिए गणित में दो प्रकार के उद्देश्य हैं, विस्तृत एवं संक्षिप्त उद्देश्य।

3.2.1 विस्तृत एवं संक्षिप्त उद्देश्य

गणित शिक्षा के विस्तृत एवं संक्षिप्त उद्देश्य की चर्चा करने से पहले आओं निम्न क्रियाकलापों को करते हैं।

 **क्रियाकलाप-1**

उन क्षेत्रों एवं कार्यों के बारे में लिखिए जहाँ पर गणित एक महत्त्वपूर्ण स्थान रखता है।


.....

.....

.....

.....

.....

 **क्रियाकलाप-2** आप क्यों सोचते हो कि बच्चों को गणित सीखना चाहिए?

.....

.....

.....

.....

.....

जैसा कि पूर्व में कहा जा चुका है कि गणितीयकरण के लिए योग्यताओं को विकसित करना ही गणित शिक्षा का अन्तिम उद्देश्य है। परन्तु गणितीयकरण क्या है? गणितीय क्रिया का शाब्दिक अर्थ है, गणितीय सूत्रों तक पहुँचना। सामान्य रूप से गणितीयकरण का संबंध गणित में विकसित अवधारणा, प्रक्रिया एवं विधि का ज्ञान के विभिन्न क्षेत्रों के उपयोग से है। जब कोई व्यक्ति अपने सभी क्रियाकलापों तथा व्यवहार में व्यवस्थित एवं क्रमबद्ध रूप से अपने आपको गणितीय सटीकता के साथ प्रदर्शित करने की क्षमता प्राप्त कर लेता है। तब हम कह सकते हैं कि उसने गणितीयकरण की क्षमता हासिल कर ली है। प्रारम्भिक गणित शिक्षा के सामान्य उद्देश्य अभिकलन एवं संरचना में सिद्धहस्त करने के अतिरिक्त गणित के उच्च लक्ष्यों



की प्राप्ति का उद्देश्य होना भी गणित शिक्षा चाहिए। गणितीयकरण की क्षमता को विकसित करने के लिए, जिसे गणित के उच्च लक्ष्यों के मुख्य आधार के रूप में देखा जाता है, शामिल क्षमताएं जैसे समस्या समाधान, स्वयं परीक्षणों के द्वारा समस्या का हल ढूँढना, अनुमानित और सन्निकटन, सुनिश्चित निर्धारण, प्रतिरूपों का उपयोग, दृश्यावलोकन, प्रस्तुतीकरण, तर्क और प्रमाण, राशियों में संबंध, गणितीय संवाद और सौन्दर्यात्मक संवेदनाएं हैं। गणित के ऐसे उच्च उद्देश्यों के अन्तर्गत छात्रों के अन्तर्निहित संसाधनों को विकसित करना, गणितीय सोच एवं तर्क का विकास, अवधारणाओं को तर्कपूर्ण ढंग से उसके अन्तिम परिणाम तक पहुँचाना तथा अमूर्त आयामों की व्यवस्था करना शामिल है। इसमें किसी कार्य को करने का ढंग तथा समस्या समाधान हेतु क्षमता और दृष्टिकोण विकसित करना शामिल है।

समस्या समाधान— समस्या समाधान करने की क्षमता का विकास करना एक महत्वपूर्ण जीवन कौशल है, जो कि रटने की प्रक्रिया के बजाए समस्या को समझने की क्षमता विकसित करके उसका हल ढूँढकर परिचित और अपरिचित परिस्थितियों में उपयोग करना है, चाहे यह समस्या दिन-प्रतिदिन की हो या पाठ्यपुस्तक में दी गयी समस्या हो।

समस्या समाधान कौशल में प्रेक्षण प्रयोग, आकलन, तर्क और जाँच करना शामिल है। अमूर्तता, मात्रीकरण, सादृश्यता, घटना का विश्लेषण, कठिन से सामान्य स्थिति की ओर बढ़ना, यहाँ तक कि आनुमान और जाँच की कई समस्याओं के संदर्भों में उपयोगी नहीं होती हैं। आप घर की लम्बाई कैसे माप सकते हैं? छात्र अपने अनुभव से अंगुलियों, पैर, हाथ, छड़ी, रस्सी, पैमाना, मीटर, फीता आदि के सहयोग से लम्बाई माप सकता है। प्रयोगों के पश्चात जब बच्चों से लम्बी दूरी मापने के लिए पूछा जायेगा तो बच्चे मापन फीते का उपयोग कर सकते हैं। जब बच्चे विभिन्न प्रकार की विधियों को सीखते हैं तो उनके समस्या समाधान करने के ज्ञान में वृद्धि होती है और वे यह भी सीख जाते हैं कि जब वे किसी समस्या का सामना करते हैं, तो कौन सी विधि उसके समाधान में सबसे अधिक उपयुक्त होगी। इस पद्धति में अंतिम परिणाम तक पहुँचने की विधियों पर अधिक बल दिया जाता है ना कि उत्पाद पर।

एक अच्छी समस्या समाधान विधि इस अवधारणा पर कार्य करती है कि जीवन की समस्याओं का एक से अधिक हल हो सकता है और उचित निर्णय लेने के लिए तर्क और विश्लेषण का उपयोग करने की आवश्यकता होती है। समस्या समाधान क्रियाकलाप गणित को वास्तविक संसार से जोड़ता है।

अन्वेषणात्मकता का उपयोग—सामान्यतः माना जाता है कि उचित सूत्र का उपयोग करके सुनिश्चित परिणाम तक पहुँचना गणित है। लेकिन वैकल्पिक विधियों और संवाद के माध्यम से भी समस्या का समाधान निकाला जा सकता है। जैसा कि हम पहले देख चुके हैं कि किसी समस्या का समाधान एक से अधिक तरीके से निकाला जा सकता है। जब कोई बच्चा पाठ्यपुस्तक में दी गयी विधि से हटकर अलग तरीके से समस्या का हल खोजता है तो हम कह सकते हैं कि बच्चे को खोज करने की प्रवृत्ति का अहसास है। यह बच्चों को अलग-अलग तरीकों से समस्या का समाधान खोजने की कोशिश के लिए प्रोत्साहित करता है। बच्चा लम्बे समय में अन्वेषणात्मक विधि से जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए



दक्ष हो जाता है। अधिकतर वैज्ञानिक, गणितज्ञ व इंजीनियर, अन्वेषणात्मकता के भण्डार का उपयोग करते हैं। इस तथ्य को विद्यालयी पाठ्य पुस्तकों में छिपाया जाता है।

अनुमान और सन्निकटन—जब समस्या का सुनिश्चित हल उपलब्ध नहीं होता है तो राशियों का अनुमान और समस्या का सन्निकटन करने का कौशल विकसित करना वैज्ञानिक अन्वेषण के लिए एक महत्वपूर्ण और आवश्यक कौशल माना जाता है। जब हम सांस्कृतिक कार्यक्रम के आयोजन में होने वाले खर्च का अनुमान लगाते हैं या किसी कार्य को पूर्ण करने के लिए सन्निकट समयावधि का निर्धारण करते हैं तो शायद हम सही उत्तर प्राप्त ना कर सकें परन्तु निश्चित रूप से समस्या के हल निकालने के नजदीक पहुँचने का लाभ प्राप्त करते हैं। विद्यार्थी उस कौशल का उपयोग कई जटिल समस्याओं के समाधान हेतु करते हैं। इस प्रकार के कौशल विकसित करने में, अधिशोधन करने में, जो पाठ्यपुस्तक और कक्षाकक्ष के वातावरण में उपलब्ध नहीं है, विद्यालयी गणित शिक्षा एक महत्वपूर्ण योगदान दे सकती है।

समुचित उपयोगिता— समुचित उपयोगिता का अर्थ है—उपलब्ध संसाधनों, परिस्थितियों का पूर्णतम उपयोग करते हुए लक्ष्य प्राप्त करना। इसे विद्यालय के गणित पाठ्यक्रम में कभी शामिल नहीं किया गया। इस कौशल के द्वारा यह परीक्षण करने में सहायता मिलती है कि क्या समस्या समाधान हेतु उपलब्ध करायी गयी शर्तें पर्याप्त है? क्या सभी दी गयी शर्तों का उपयोग समस्या समाधान में किया जा सकता है? आओ अंकगणित की दो साधारण समस्याओं पर विचार करें—

1. अजय की वार्षिक आय 3.5 लाख रुपये है वह 15 लाख रूपये कीमत का घर खरीदना चाहता है। वह कितने वर्ष पश्चात बिना ऋण लिये यह घर खरीद सकता है?
2. मिली अपनी रिश्तेदारी के पाँच छोटे भाई-बहनों (A,B,C,D,E) के लिए छोटे उपहार खरीदना चाहती थी तथा उसके पास 100 रूपये थे। प्रत्येक बच्चा अपने से छोटे चचेरे भाई-बहन से 5 रू. अधिक प्राप्त करेगा। मिली किस प्रकार से रूपयों का वितरण करे कि राशि का पूर्ण रूप से उपयोग किया जा सके। (अर्थात् राशि ना कम पड़ेगी और ना ही बचेगी)।

प्रथम समस्या में समाधान प्राप्त करने हेतु कई शर्तों की आवश्यकता है। दी गयी दो स्थितियाँ (वार्षिक आय और घर की कुल कीमत) घर खरीदने के लिए समय के निर्धारण में पर्याप्त नहीं है। इसके लिए निश्चित वार्षिक बचत और खर्च का ब्यौरा तथा आने वाले वर्षों में घर की कीमत में वृद्धि और अवमूल्यन की जानकारी के बिना समस्या का समाधान नहीं निकाला जा सकता है। दूसरी समस्या में समस्या का समाधान उपलब्ध राशि का समुचित उपयोग दी गयी शर्तों के आधार पर संभव है।

समुचित उपयोगिता का विचार सदैव आसान नहीं होता है, लेकिन उपलब्ध सूचनाओं के सर्वोत्तम उपयोग पर आधारित बुद्धिमता पूर्ण चुनाव एक गणितीय कौशल है, जिसे प्राथमिक विद्यालय स्तर पर भी सिखाया जा सकता है।

विद्यालयी गणित के सभी क्षेत्रों की विभिन्न समस्याएं हैं। जैसे ज्यामितीय निगमन को सिद्ध करना, ज्यामितीय आकृतियों की रचना करना, बीजगणितीय समीकरण, सर्वसमिका या किसी



अंकगणित की समस्याओं को हल करके समुचित उपयोगिता कौशल विकसित किया जा सकता है जो जीवन की वास्तविक समस्याओं को हल करने के लिए ज्यादा प्रासंगिक है।

प्रतिरूपों का उपयोग—प्रतिरूपों के अध्ययन में विद्यार्थी प्रतिरूप पहचान करके एवं विवेचना करके एक सामान्यीकरण की प्रक्रिया के द्वारा एक निश्चित नियम या सूत्र की खोज कर सकते हैं। यदि बच्चों को आकार, डिजाइन, घटना की निरंतरता या अंकों के समूह का अध्ययन करके, क्रमबद्धता को पहचानने में सक्षम बनाये तो बच्चे यह अनुभव करने लगते हैं कि गणित में नियमितता का एक महत्वपूर्ण स्थान है।

यह गणित में आगमन विधि के द्वारा समस्याओं को हल करने का आधार भी रखता है। प्रतिरूप को खोजना आकर्षक एवं रूचिपूर्ण हो सकता है इसके साथ ही यह विद्यार्थियों के लिए मजेदार क्रियाकलाप भी हो सकता है।

प्रतिवेदन—प्रतिरूपीय अवस्थाएं जिनमें राशियों, आकारों और रूपों का इस्तेमाल होता है, गणित का सर्वोत्तम उपयोग है। राशियों, प्रतिरूपों और विभिन्न आकार के माध्यम से समस्याओं का प्रतिवेदन गणित की एक मुख्य उपयोगिता है। ऐसा निरूपण सारतत्व को स्पष्ट करता है, दृश्यावलोकन में सहायक होता है और अप्रासंगिक सूचनाओं को दूर करने में सहायक होता है। हमें ऐसे उदाहरणों की आवश्यकता है जिसमें निरूपण की विभिन्नताओं को दिखाया गया हो ताकि संबंधित लाभों को समझा जा सकें। उदाहरण के लिए भिन्न को एक वस्तु एवं इसके टुकड़े करके भली प्रकार समझा जा सकता है लेकिन संख्या रेखा पर भी बिंदु के द्वारा स्पष्ट रूप से दर्शाया जा सकता है। दोनों निरूपण विभिन्न संदर्भों में लाभदायक एवं सही है। भिन्नों का इस विधि से अधिगम, अंकगणित के भिन्न अधिगम से अधिक उपयोगी है।

तर्क एवं प्रमाण—गणित तर्क एवं प्रमाणों पर आधारित है। दो व्यक्तियों के पास एक ही प्रश्न के एक ही उत्तर, अलग-अलग रूप में हो सकते हैं। इसका निम्न उदाहरण के माध्यम से अवलोकन कर सकते हैं—

3, 15, 35, 63, 99, ...? की अगली संख्या क्या होगी?

व्यक्ति A ने निम्न पद्धति के माध्यम से परिणाम दिया

$$2^2-1, 4^2-1, 6^2-1, 8^2-1, 10^2-1, 12^2-1=143$$

तथा B ने कुछ इस तरह अपना उत्तर प्रस्तुत किया

$$3, 3+12, 15+12+8, 35+12+8+8, 63+12+8+8+8, 99+12+9+8+8+8+8 = 143$$

गणित में तर्क एवं प्रमाण प्रक्रिया महत्वपूर्ण है। इस तरह विद्यालय गणित में प्रमाण को, एक व्यवस्थित तर्क के रूप में प्रस्तुतीकरण के लिए प्रेरित करना चाहिए। इसके उद्देश्य होने चाहिए— तर्क का विकास—तर्क का मूल्यांकन, अनुमान लगाना एवं खोज करना तथा और यह समझना कि तर्क की कई विधियां हैं।



संबंध बनाना—गणित, गणित के अन्तर्गत तथा अन्य विषयों के बीच आपस में संबंध बनाता रहा है। बच्चे गणित की कक्षा में ग्राफ खींचना सीखते हैं, लेकिन अपनी प्रोजेक्ट कार्य में ऐसे ग्राफ को खींचना भूल जाते हैं, या भौतिक या अन्य विषयों की समस्याओं को हल करने में भी ग्राफ को खींचना भूल जाते हैं। विज्ञान की समस्याओं के हल निकालने में तथा तथ्यों का प्रभावकारी प्रस्तुतीकरण में गणितीय चिह्न एवं गणितीय तर्क की विस्तृत उपयोगिता है। गणितीय ज्ञान को पाठ्यक्रम के अन्य क्षेत्र तथा व्यावहारिक जीवन की समस्याओं के साथ संबंध जोड़ने के कौशल का विकास करने की प्रक्रिया गणित अधिगम के प्रारम्भिक अवस्था से करना चाहिए।

गणितीय संवाद—सटीक अभिव्यक्ति तथा सुस्पष्ट भाषा का प्रयोग गणित शिक्षा की मुख्य विशेषताएं हैं। गणितीय चिह्न, भाषा, संक्रियाएँ आदि गणित को अधिक अर्थपूर्ण और व्यवस्थित बनाता है। x, y से दोगुना तथा 52 अधिक है, और यदि $y=75$ है तो x का मान बताओ। इसको सटीकता के साथ कुछ इस तरह प्रस्तुत कर सकते हैं—

$$x = 2y + 52 = 2 \times 75 + 52 = 202$$

यह व्यक्ति को अपने अनुभव और दृष्टिकोण को सटीकता से संप्रेषित करने में सहायता करता है।

गणित अधिगम के इन विस्तृत उद्देश्यों को विद्यालय के पाठ्यक्रम तथा सहभागी क्रियाओं में उपेक्षित किया जाता रहा है। प्रायः हम कुछ मूलभूत पाठ्यवस्तु की उपलब्धि तक ही सीमित हैं। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा-2005 में स्पष्ट उल्लेखित है कि गणित के संकीर्ण उद्देश्य में उपयोगी क्षमताओं, विशेषकर संख्यांक, संख्या संक्रियाएं, मापन, दशमलव और प्रतिशत से संबंधित, का विकास करना है। हालांकि अधिगम में मूलभूत पाठ्यवस्तु के ज्ञान की प्राप्ति आवश्यक है, बिना सटीक समझ को विकसित किये, गणित शिक्षा के विस्तृत उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए जिन कौशलों का उपयोग किया जाता है, पाठ्यवस्तु को पाठ्यवस्तु के लिए ही सीखना रटने को बढ़ावा देता है। पाठ्यक्रम के साथ कक्षा का संचालन इन दोनों पहलुओं को एक ही समय पर समन्वित करने की आवश्यकता है।

गणित शिक्षा के विस्तृत एवं संक्षिप्त उद्देश्यों पर विचार कीजिए, गणित शिक्षा के कुछ मुख्य उद्देश्य निम्नलिखित हैं—

- सोचने और तर्क करने की क्षमता का विकास करना।
- दैनिक जीवन की गणितीय समस्याओं का समाधान करना।
- पर्यावरण और संस्कृति के साथ परिचित होना और समझना।
- बच्चे को भविष्य के विभिन्न तकनीकी और सामान्य व्यवसाय के लिए तैयार करना।
- बच्चे को उच्च अध्ययन के लिए तैयार करना।
- बच्चे में खोजी क्षमताओं का विकास करना।



E-1 गणितीय अवधारणाओं के शिक्षण और अधिगम के किन्हीं पाँच उद्देश्यों को लिखिए। किन्हीं पाँच शिक्षण एवं अधिगम गणितीय अवधारणाओं का उल्लेख कीजिए।

3.2.2 विशिष्ट उद्देश्य

गणित शिक्षा के विशिष्ट उद्देश्य, कक्षा कक्ष में प्रभावशाली अधिगम पद्धति की योजना बनाने में, सही विधि का डिजाइन करने में, पाठ्यक्रम, शिक्षण सहायक सामग्री तैयार करने के लिए मार्ग दर्शन करने में, मूल्यांकन पद्धति को तैयार करने, आदि में सहायता करते हैं।

यह वांछनीय है कि गणित शिक्षा के विशिष्ट उद्देश्यों को, सुस्पष्ट, सटीक, क्रियान्वनरूप और प्राप्य योग्य के रूप में लिखकर रखें। गणित शिक्षा के विशिष्ट उद्देश्य निम्नांकित हैं।

यह सुनिश्चित करना कि गणित अधिगम की शुरुआत अच्छी हो।

- विषय के मूलभूत अवधारणा, पद्धतियाँ स्पष्ट हो।
- गणित अधिगम के लिए, प्रेम, विश्वास और रुचि का सृजन करना।
- गणित विषय में रुचि और आत्मविश्वास का विकास करना।
- सटीकता के लिए प्रोत्साहन देना।
- विद्यार्थियों को गणित को वर्तमान तथा भविष्य के जीवन से जोड़ना सिखाना।
- गणित में कलात्मकता देखना।
- विद्यार्थियों में, नियमितता, अभ्यास, धैर्य, स्वावलम्बन और परिश्रम करने की आदतों का विकास करना।
- अन्य विषयों में गणित का उपयोग करना।
- गणितीय भाषा और चिह्नों से परिचित कराना।
- उच्च कक्षा के गणित अध्ययन के लिए तैयार कराना।
- बच्चों को गणितीय प्रदर्शनी के लिए तैयार करना।

सम और विषम संख्याओं के शिक्षण के अनुदेशनात्मक उद्देश्य—

छात्र सीखेंगे:-

- किसी वस्तु के संग्रह को दो बराबर समूहों में बाँटना
- तीन अंकीय सम और विषम संख्याओं को पहचानना
- सम और विषम संख्याओं में अंतर करना
- सम और विषम संख्याओं का उदाहरण देना
- वास्तविक जीवन में सम और विषम संख्याओं के उपयोग का उदाहरण



टिप्पणी

E-2 गणित अवधारणा के शिक्षण अधिगम के विशिष्ट उद्देश्यों के उल्लेख के कोई दो कारण बताइये

E-3 निम्न में से कौन सा गणित का अनुदेशनात्मक उद्देश्य है—

- (i) छात्र में सोचने और तर्क करने की क्षमता का विकास करना
- (ii) जीवन के प्रति वास्तविक और वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास करना
- (iii) दैनिक जीवन की समस्याओं के हल में द्विअंकीय संख्याओं के जोड़ का प्रयोग करना
- (iv) विभिन्न सिक्को को पहचानना और समझना
- (v) तीव्रता और सटीकता के साथ गणना करना
- (vi) “पन्द्रह, दस से पाँच अधिक है” को उचित चिहनात्मक रूप में लिखना
- (vii) उचित सन्निकटन और अनुमान मापन का निर्माण करना
- (viii) दैनिक जीवन की साधारण समस्याओं को हल करने में, प्रत्यक्ष चर के सूत्र का अनुप्रयोग करना।
- (ix) क्रम तथा प्रतिरूप को पहचानना
- (x) तीन अंकीय सम और विषम संख्याओं को पहचानना



क्रियाकलाप-3

निम्नांकित के शिक्षण अधिगम के लिए अनुदेशनात्मक उद्देश्य लिखिए

(i) तीन अंकीय संख्याओं के स्थानीय मान

.....

.....

.....

(ii) साधारण ब्याज

.....

.....

.....



3.3 विद्यालय गणित के लिए परिप्रेक्ष्य

गणित अध्यापक होने के नाते, हमें विद्यार्थियों में गणित अधिगम के प्रति रूचि उत्पन्न करना चाहिए। लेकिन कक्षा क्रियायें, शिक्षण पद्धति और विद्यार्थियों के साथ संवाद इस बात पर निर्भर करता है कि हमारी गणित शिक्षण के प्रति क्या अपेक्षाएँ और विश्वास है? गणित के प्रति हमारा क्या दृष्टिकोण है? क्या हम इसे अमूर्त, शुष्क और कठिन विषय के रूप में देखते हैं? क्या रटने की पद्धति ही गणितीय अवधारणाओं को सीखने की एकमात्र विधि है? या इसे हम ऐसे अर्थपूर्ण और रूचिपूर्ण विषय के रूप में देखते हैं जिसे हर कोई सीख सकता है। हम अपने आपसे ऐसे और कई प्रश्न कर सकते हैं। संक्षेप में गणित शिक्षा के क्या परिप्रेक्ष्य है?

परिप्रेक्ष्य ऐसे आदर्श से संबंध रखता है जिसे हम प्राप्त करने की इच्छा रखते हैं। एक उच्च परिप्रेक्ष्य हमें उच्च गुणवत्तापूर्ण शिक्षा प्राप्त करने के लिए प्रेरित करता है। यह बात गणित शिक्षा में भी लागू होती है। विभिन्न राष्ट्रीय रिपोर्ट और डाक्यूमेन्ट्स (दस्तावेज) में विद्यालय स्तर पर गणित की शिक्षा का क्या राष्ट्रीय परिप्रेक्ष्य है?

राष्ट्रीय शिक्षा आयोग 1964-66 में तकनीकी और वैज्ञानिक प्रगति और विकास के द्वारा सभी क्षेत्रों में सर्वांगीणविकास का जो सपना देखा उसे राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) ने भी उल्लेख किया है। इस शताब्दी में स्वचालन और साइबनेटिक्स के आविर्भाव ने वैज्ञानिक औद्योगिक क्रांति की शुरुआत की और इसने गणित अध्ययन की तरफ विशेष ध्यान देने के लिए और अधिक आवश्यक बना दिया। राष्ट्रीय शिक्षा नीति 1986 ने प्रस्तावित किया—“गणित को एक ऐसे वाहन के रूप में सादृश करना चाहिए जिसमें बच्चों को सोचने, तर्क करने, विश्लेषण करने, और उसे तर्कपूर्ण ढंग से अभिव्यक्त कर सकने के लिए प्रशिक्षित किया जा सके”। एक विशिष्ट विषय के अतिरिक्त इसे उन विषयों के साथ जोड़कर देखा जाये जिसमें विश्लेषण और तर्कशीलता का समावेश हो। यह महसूस किया जा सकता है कि गणित शिक्षण को एक ऐसे साधन के रूप में देखा जाने लगा है जो राष्ट्रीय विकास के लिए विद्यार्थी की योग्यताओं का विकास करें। इस विचारधारा को राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 में भी इसे आगे बढ़ाया गया है जहाँ पर अपेक्षा गयी है कि गणित शिक्षा ऐसी होनी चाहिए जिससे बच्चों के वे संसाधन समृद्ध हो जो चिंतन और तर्क में, अमूर्तनो की संकल्पना करने और उनका व्यवहार करने में, समस्याओं को सूत्रबद्ध करने और सुलझाने में उनकी सहायता करें। उद्देश्यों का यह व्यापक फलक उस प्रासंगिक और अर्थपूर्ण गणित को पढ़ाकर तय किया जा सकता है जो बच्चों के अनुभवों में गुंथी हुई हो, जो गणित में सिद्धान्त निर्माण और विचार सृजन करने में सहायक हो।

विद्यालयी गणित के लिए परिप्रेक्ष्य

गणित के उच्च उद्देश्यों को ध्यान में रखकर राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 में विद्यालयी गणित के लिए परिप्रेक्ष्य का स्पष्ट उल्लेख किया है।

→ बच्चे गणित को आनंदपूर्वक सीखें— यह एक महत्वपूर्ण लक्ष्य है, यह इस पर आधारित है कि गणित को जीवन पर्यन्त इस्तेमाल किया जा सकता है और विद्यालय एक



ऐसा स्थान है जहाँ पर गणित के लिए रूचि उत्पन्न की जा सकती है। दूसरी ओर गणित के प्रति भय उत्पन्न करना विद्यार्थी को एक महत्वपूर्ण विद्या से जीवनभर के लिए वंचित करना है।

- **बच्चे महत्वपूर्ण गणित सीखें:-** गणित में सूत्रों और यांत्रिक प्रक्रियाओं से आगे भी बहुत कुछ है। सिर्फ इसी तक सीमित रखना बच्चों के लिए हानिकारक है। गणितीय तकनीकों को कब और कहाँ इस्तेमाल करें इसकी समझ विकसित करना अधिक महत्वपूर्ण है बजाए इसके कि विद्यार्थी रटकर गणितीय तकनीकों को याद रखें। (जिसे विद्यार्थी पुस्तक देखकर या वेबसाइट पर भी प्राप्त कर सकता है) विद्यालय को चाहिए ऐसी समझ उत्पन्न करने वाले वातावरण का सृजन करें।
- बच्चे गणित को ऐसा विषय माने जिस पर वे बात कर सकते हैं, जिसमें संप्रेषण हो सकता है, आपस में जिस पर चर्चा कर सकते हैं, और जिस पर साथ-साथ काम कर सकते हैं। गणित को विद्यार्थी के जीवन अनुभव का हिस्सा बनाना गणित शिक्षण-अधिगम का सबसे अच्छा तरीका है।
- **बच्चे सार्थक समस्याएँ उठाएं और हल करें:-** विद्यालय में गणित समस्या समाधान करने के लिए आवश्यक कौशल को विकसित करता है। यह योग्यता जीवनभर उपयोगी हो सकता है। तकनीक और विधियाँ जो विद्यालय में सीखा गया हो वह बहुत ही महत्व का हो सकता है। विद्यार्थी सिर्फ समस्या समाधान करना ही नहीं सीखते वरन वे कुछ रूचिपूर्ण समस्या का निर्माण भी करते हैं। प्रश्न पूछना यह प्रदर्शित करता है कि विद्यार्थी के सीखने का स्तर क्या है? उसकी गुणवत्ता क्या है? इसके अतिरिक्त यह भी प्रदर्शित करता है कि विद्यार्थी का सृजनात्मक अन्वेषण करने की क्या योग्यता है।
- **बच्चे अमूर्त का प्रयोग संबंधों को समझें:-** अंकगणित, बीजगणित, विद्यालयी गणित के सभी मूल तत्व अमूर्त की प्रणाली संघटन और सामान्यीकरण के लिए पद्धति मुहैया कराते हैं। तर्कपूर्ण सोच विकसित करना गणित का एक महान उपहार है। ऐसी सोच और संप्रेषण की आदतों का बीजरोपण करना गणित का मुख्य उद्देश्य है।
- अध्यापक कक्षा के प्रत्येक बच्चे के साथ इस विश्वास के साथ पर काम करें कि प्रत्येक बच्चा गणित सीख सकता है। गणित सफलता को हर बच्चे के अधिकार की तरह देखा जाये। बुद्धिमान बच्चों के साथ-साथ सभी बच्चों में गणितीय कौशलों का विकास करने का सुनिश्चित प्रयास करना चाहिए।

3.3.1 बच्चे और गणित शिक्षा

कल्पना करे कि आप एक प्राथमिक विद्यालय में हैं जहाँ एक कक्षा में एक अध्यापक गणित शिक्षण कर रहे हैं। वहाँ हम क्या देखते हैं? शायद अध्यापक हाथ में चाक लिए श्यामपट पर कुछ समझा रहे हो, हल लिख रहे हो, विद्यार्थियों को श्यामपट से उत्तर को अपने कापियों पर लिखने के लिए कह रहे हो, पाठ्यपुस्तक के अभ्यास हल निकाल रहे हों, विद्यार्थी



अध्यापकों के प्रश्नों के उत्तर दे रहे हों या अध्यापक के शब्दों को दोहरा रह हो, जहा पर अध्यापक सक्रिय और छात्र निष्क्रीय होता है।

गणित-अधिगम और शिक्षण की समस्याएं

भय और असफलता—अधिकतर छात्र, सहपाठी, अध्यापक, अभिभावकों ने प्राथमिक कक्षाओं में गणित अधिगम और शिक्षण को मुख्य प्राथमिकता दी है और अधिकतर सोचते है कि यह एक कठिन विषय है। उद्देश्यों की जानकारी का अभाव भय और असफलता का कारण है। स्थानीय मान को ठीक से पहचानने में असफलता, गणित के चारों सक्रियाओं में असफलता की ओर ले जाती है।

निराशाजनक पाठ्यक्रम—अनाकर्षक और बोझिल गणित पाठ्यक्रम विद्यार्थी में निराशा उत्पन्न करता है। अधिकतर गणित पाठ्यक्रम में पद्धतियों, सूत्रों, गणितीय तथ्यों और अवधारणाओं को कठस्थ करने पर जोर दिया जाता है। गणित पाठ्यक्रम और पाठ्य पुस्तक अपरिवर्तनीय प्रत्यादिष्ट है। गणित पाठ्यक्रम वास्तविक जीवन से दूर है।

अपर्याप्त अधिगम सामग्री—प्राथमिक कक्षाओं के अधिकतर विद्यार्थियों के लिए गणित की किताब ही एक मात्र उपलब्ध संसाधन सामग्री है। अधिकतर पाठ्यपुस्तक, जिसमें गणित पाठ्यपुस्तक भी शामिल है आदेशात्मक विषयवस्तु से भरे हैं। विद्यार्थियों के लिए गणित पाठ्यपुस्तक में, आनंदपूर्वक और मनोरंजक ढंग से सीखने के लिए अत्यन्त सीमित स्थान है। विद्यार्थियों विशेषकर ग्रामीण और दूरस्थ क्षेत्रों में रहने वाले बच्चों के लिए पाठ्यपुस्तक के अतिरिक्त और अन्य शिक्षण सामग्री उपलब्ध नहीं है।

निकृष्ट आकलन पद्धति—अधिकतर गणित पाठ्यक्रम में सूत्रों को कठस्थ करने पर बल दिया जाता है, हमारा कक्षा शिक्षण पद्धति भी परीक्षा पर आधारित है। हमारे विद्यालय में विद्यार्थियों के सूत्रों एवं तथ्यों का कठस्थीकरण, गणितीय पद्धति के ज्ञान को ध्यान में रख कर आकलन हेतु परीक्षण पत्र तैयार किये जाते हैं। प्रश्नों का चयन इस प्रकार का होता जिससे विद्यार्थियों का अनुभव की जाँच न करके, उनसे एक पूर्व निर्धारित उत्तर देने की अपेक्षा की जाती है। उदाहरण+..... = 8 का उत्तर लिखने के छात्र स्वतंत्र है लेकिन $2+6 = -?$ के लिए स्वतंत्र नहीं है। इसके अतिरिक्त एक ही प्रकार के आकलन पद्धति का प्रयोग रचनात्मक और आकलन में किया जाता है। इस प्रकार के निकृष्ट आकलन पद्धति से यह समझा जाता है कि गणित एक यांत्रिक गणना मात्र है।

शिक्षक की अपर्याप्त तैयारी—प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण और अधिगम इस बात पर निर्भर करता है कि अध्यापक ने किस प्रकार की तैयारी की है? उसकी अपनी समझ अध्यापक की शिक्षण तकनीक की तैयारी और इसके अतिरिक्त विद्यार्थियों की अपनी तैयारी क्या है? जैसा कि गणित शिक्षकों की कमी है इसके कारण अन्य अध्यापकों को बाध्यवश कक्षाओं में गणित पढ़ाना पड़ता है। ये अध्यापक पाठ्यपुस्तक पर निर्भर होते हैं। अधिकतर अध्यापक ये सोचते हैं कि प्राथमिक स्तर के कक्षाओं के गणित के बारे में वे सब कुछ जानते हैं। इस प्रकार गणित शिक्षण के लिए अध्यापकों की तैयारी अपर्याप्त होती है।



शिक्षण-अधिगम पद्धति—प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण-अधिगम विधि आकर्षक नहीं है क्योंकि (i) किताबी ज्ञान कक्षा में निराशा का सृजन करती है। (ii) विद्यालय में गणित अधिगम नीरस, उबाऊ, अरूचिपूर्ण और नियत प्रकार का बन गया है (iii) रटने पर बल देना (iv) अधिगम के बजाय शिक्षण पर बदल देना (v) समझ शक्ति, अनुप्रयोग और कौशल को विकसित करने की उपेक्षा करना।

रूचि न लेना—अधिकतर विद्यार्थी गणित अधिगम को कठिन पाते हैं और विश्वास खो देते हैं। गणित अधिगम शिक्षण पद्धति आनंदप्रद नहीं है और अनाकर्षक है। इस तरह ऐसे वातावरण में विद्यार्थी गणित के प्रति अपनी रूचि खो देते हैं। विद्यार्थी यह भी नहीं जानते हैं कि गणित सीखने के क्या लाभ उनको प्राप्त होगा?

3.3.2 कक्षा से बाहर गणित शिक्षा

प्राथमिक कक्षाओं में पाठ्यपुस्तक को ही सीखने का एक मात्र स्रोत मानते हैं। अधिकतर स्थितियों में पाठ्यपुस्तक के अलावा अन्य पुस्तक की सहायता लेने के लिए उत्साहित नहीं किया जाता है। क्योंकि परीक्षा पत्र निर्धारित पाठ्यपुस्तक के पाठ्यक्रम पर आधारित होता है। कुछ प्रश्न मस्तिष्क में उठते हैं, क्या पाठ्यपुस्तक ही ज्ञान प्राप्ति का एक मात्र और अंतिम साधन है? क्या लेखक को बालमनोविज्ञान के बारे में ज्ञान है? क्या बच्चे के वातावरण को ध्यान में रखा गया है? हमारे पास इन सब प्रश्नों और इसी प्रकार के अन्य प्रश्नों का संतोषजनक उत्तर नहीं है लेकिन हम पाठ्यपुस्तक को शिक्षण-अधिगम का मुख्य स्रोत स्वीकार करते हैं।

बच्चे सिर्फ अध्यापक से ही नहीं सीखते हैं, परन्तु वे अन्य बच्चों से बातचीत करके तथा आपने आसपास के परिवेश से भी सीखते हैं। विद्यार्थी अपने ज्ञानेन्द्रियों, जैसे सुनकर, देखकर, छूकर, सूंघकर और चखकर से सीखते हैं। ऐसे क्रियाकलाप जिसमें विद्यार्थी एक से अधिक ज्ञानेन्द्रियों का उपयोग करते हैं वहां छात्र बेहतर तरह से सीखते हैं। विद्यार्थी आसानी से सीखते हैं यदि अधिगम की प्रक्रिया रूचिपूर्ण, मनोरंजक हो, क्रियाकलापों में स्वतंत्र रूप से सोचने व भाग लेने के लिए अवसर मिलता हो, तथा अधिगम प्रक्रिया उनके आसपास के परिवेश से संबंधित हो इसके अतिरिक्त छात्र हर समय, हर जगह, जैसे घर, बाजार, कक्षा के भीतर और बाहर खेल के मैदान में कुछ न कुछ सीखते रहते हैं। अतः हमारा उद्देश्य है कि विद्यालय में ऐसे आनंददायक रूचिपूर्ण अधिगम वातावरण बनाये जिससे कक्षा के भीतर और कक्षा के बाहर सीखने के बीच कोई दीवार न रहे।

निम्नांकित स्थिति पर ध्यान दें—

स्थिति 1— एक बास्केट में सात खिलौने हैं, तीन खिलौने टूटे हुए हैं। विद्यार्थियों से पूछा जाता है कि बताओ बास्केट में कितने खिलौने हैं?

रनबीर:- बास्केट में सात खिलौने हैं

यश:- उसमें चार खिलौने हैं



रत्ना:- उसमें दस खिलौने है

आशिष:- मैं कह नहीं सकता क्योंकि अलग-अलग व्यक्तियों के लिए संख्या अलग अलग है।

सौम्या:- प्रश्न में कुछ सुधार की आवश्यकता है।

किसका कथन सत्य है? और क्यों?

कथनों की व्याख्या:-

रनबीर:- खिलौने टूटे हुए है और सभी टूटे खिलौने बास्केट में है।

यश:- $7-3 = 4$

रत्ना:- तीन खिलौने टूटे हैं, अतः कुल छः खिलौने टूटे है, $7 - 3 + 6 = 10$

आशिष :- मैं कह नहीं सकता क्योंकि अलग-अलग व्यक्तियों के लिए खिलौने की संख्या अलग-अलग हो सकता है क्योंकि खिलौने 2, 3 या 4... टुकड़ों में टूटे हुए हो सकते हैं।

सौम्या :- प्रश्न में सुधार की आवश्यकता है। बास्केट में कुल कितने अच्छे (बिना टूटे) खिलौने हैं? तब उत्तर होगा $7-3 = 4$

कथनों की व्याख्या को पढ़ने के बाद आप कथनों के बारे में अपने विचार की जाँच करें कि क्या कथन सही है या गलत? यश को पूरे अंक कोई दे सकता है, क्योंकि यह सामान्यतः सही कथन है। किन्तु अन्य कथनों के बारे में भी सोचें।

निम्नांकित प्रश्नों पर गौर करें-

इस प्रश्न का मुख्य उद्देश्य क्या है?

क्या यश ने उस उद्देश्य को प्राप्त किया है?

क्या रनबीर, रत्ना, आशिष, सौम्या ने उद्देश्य की प्राप्ति की?

यश का कथन कक्षा कक्ष के उत्तर की पुनरावृत्ति है, लेकिन रनबीर, आशिष रत्ना, सौम्या ने प्रश्न को अलग ढंग से देखने का प्रयास करते हैं।

उन्होंने अपने अनुभव, जीवन की परिस्थितियों, स्वतंत्र विचार को ध्यान में रखा। वे कक्षा कक्ष के वातावरण तक सीमित नहीं हैं।

स्थिति-2 बिना लेखन सामग्री का प्रयोग किये हुए, अध्यापक ने विद्यार्थियों को $18 \times 12 = ?$ का हल निकालने के कहा।

पापली :- $18 \times 10 + 18 \times 2 = 216$



जिबान :- $12 \times 10 + 12 \times 8 = 216$

राहुल :- $18 \times 12 = 216$

आकाश :- $20 \times 12 - 2 \times 12 = 216$

उपरोक्त उत्तरों का विश्लेषण करें और बताये कि कौन विद्यालय के बाहर जीवन से अपने ज्ञान को जोड़ने में सफल रहा और कैसे? यदि हम विद्यार्थियों को गणितीय समस्याओं को उनको अपनी विधि से हल करने की स्वतंत्रता दी जाये तो हमे आश्चर्य जनक रूप से विविध प्रकार के लिए विचार पद्धति मिलेगी।

विद्यालय से बाहर के जीवन को ज्ञान से जोड़ने का कार्य क्षेत्र—

बाजार:- अधिकतर विद्यार्थी अपने माता पिता के साथ बाजार गये होंगे। उन्होंने सामानों/वस्तुओं को खरीदने या बेचने की प्रक्रिया में भाग लिया होगा या देखा होगा। उन्होंने क्रेता और विक्रेता के व्यवहार का भी अवलोकन किया होगा। आप विद्यार्थियों के वास्तविक जीवन के अनुभवों का लाभ उठाकर उन्हें, लाभ-हानि, बिल तैयार करना, तौलना, रूपये गिनना और कीमत संबंधी प्रश्न देकर उनके अनुभव के आधार पर हल करने के लिए कहें।

बगीचा:- विद्यार्थी घर में, विद्यालय में, अपने साथियों के साथ खेल के मैदान में प्लाट तैयार करते हैं, उस समय शायद वे नहीं जानते हैं कि गिनना, मापन कोण बनाना, ज्यामितीय आकृति, अलग-अलग लाइन, (रेखाएं), औसत इत्यादि क्या है? परन्तु वे अपने अनुभव के आधार पर प्लाट तैयार करते हैं जहां पर इन सबका इस्तेमाल हो सकता है। कोई दो मीटर लम्बे और चौड़े प्लाट कैसे तैयार कर सकता है? विद्यार्थियों से आप उनके अनुभव जाने और आप पायेंगे कि वे बहुत से गणितीय अवधारणाओं को पहले से प्राप्त चुके हैं, आवश्यकता है इन अवधारणाओं को परिमार्जन करने की ताकि उन्हें औपचारिक ज्ञान और गणितीय अवधारणाओं की सही जानकारी दी जा सके।

वास्तविक जीवन:- एक मेंढक एक दिन में 30 मीटर ऊपर एक खम्बे पर चढ़ता है तथा एक रात में 20 मीटर नीचे खिसक जाता है। यदि खम्बा 70 मीटर ऊँचा है तो बताइये मेंढक को खम्बे के शिखर पर चढ़ने में कितने दिन लगेंगे? उच्च प्राथमिक कक्षाओं के छात्र शायद प्रश्न का उत्तर 7 दे। एक विद्यार्थी ने उत्तर 5 दिन बताया, क्योंकि 4 दिन में 40 मीटर ऊपर चढ़ता है और पाँचवे दिन वह शिखर पर पहुँचेगा अर्थात् 70 मीटर। जब विद्यार्थियों को नैसर्गिक वातावरण में कार्य करने का अवसर प्राप्त होता है और अपने अनुभव के आधार पर कार्य करते हैं तो उनमें ज्ञानार्जन क्षमता समृद्ध होता है। अतः वास्तविक जीवन के अनुभवों को शिक्षण-अधिगम की प्रक्रिया में ध्यान में रखना चाहिए

डिजाइन बनाना:- विद्यार्थी अपने पुस्तकों पर जिल्द चढ़ाते हैं, पेंटिंग करते हैं, अपने घर को सजाते हैं बगीचे में पेड़-पौधे लगाते हैं, अपने खिलौने की डिजाइन करते हैं, ऐसे समय में वे गणित का इस्तेमाल कर रहे होते हैं? अपने नाम को माचिस की तीलियों से डिजाइन करने में कितने तीलियों की आवश्यकता होती है? अध्यापक अवश्य ही इन क्रियाकलापों का



टिप्पणी

सूक्ष्मता से अवलोकन करें और कक्षा शिक्षण में इसका इस्तेमाल करें।

त्यौहार :- हम अपने घरों में तथा विद्यालय में कई त्यौहार मनाते हैं। छात्र उत्साहपूर्वक स्वतंत्रता दिवस, गणतंत्र दिवस, अध्यापक दिवस, बाल दिवस में भाग लेते हैं, सरस्वती पूजा, ईद, दीवाली, क्रिसमस आदि त्यौहार में भी भाग लेते हैं। वे विभिन्न गतिविधियों में भाग लेकर इन महत्वपूर्ण अवसरों को यादगार बनाते हैं। वे विभिन्न प्रकार के सजावट की सामग्री खरीदने, मिठाई खरीदने बाजार जाते हैं तथा खर्च का हिसाब किताब भी रखते हैं, ऐसे समय में भी वे गणित सीखते हैं।

खेल का मैदान:- विद्यार्थी कबड्डी, फुटबाल, क्रिकेट, वालीबाल, बास्केटबाल और अन्य भीतरी खेल खेलते हैं। वे अपने नियम स्वयं बनाते हैं। समूह में वे खेल का मैदान तैयार करते हैं। बच्चे वृत्त, आयताकार, वर्ग, त्रिभुज आदि आकृति, बिना किस नियम के, खेल के मैदान में बनाते हैं। वे व्यक्तिगत और समूह के स्कोर करने की रणनीति स्वयं बनाते हैं। रमेश दो चौके, दो बार दो रन और एक बार एक रन बनाया क्रिकेट के खेल में। वह किस प्रकार अपने स्कोर की गणना करेगा जबकि वह गुणन करने की विधि से परिचित नहीं है?

E-4 पाठ्यपुस्तक से बाहर जाकर आप किस तरह गणितीय अवधारणाओं का शिक्षण-अधिगम कर सकते हैं।

3.3.3 गणित अधिगम को आनंददायक बनाना

विद्यालय में गणित अधिगम नीरस, उबाऊ, अरुचिपूर्ण और कठिन होता है। इसका मुख्य कारण विद्यार्थियों एवं अध्यापकों का अनुभव उत्साहवर्धक आनंददायक नहीं है। बिना बोझ का अधिगम, रिपोर्ट कहता है आनंदहीन अधिगम में बहुत कुछ पढ़ाते हैं परन्तु सीखने और समझने के लिए कुछ भी नहीं होता है। गणित अधिगम की योजना बनाते समय यह जानना आवश्यक है कि छात्र गणित अधिगम के दौरान क्या और किन चीजों से उत्साहित होते हैं। उनके क्या रुचि है और आवश्यकता है? विद्यार्थी वास्तव में सीखते कैसे हैं? छात्र कैसे जानते हैं?



क्रियाकलाप 5

अपने विद्यार्थियों के उन क्षेत्रों की पहचान करें जिनमें उन्हें रुचि है और कौन सा क्षेत्र गणित अधिगम के लिए उचित है।

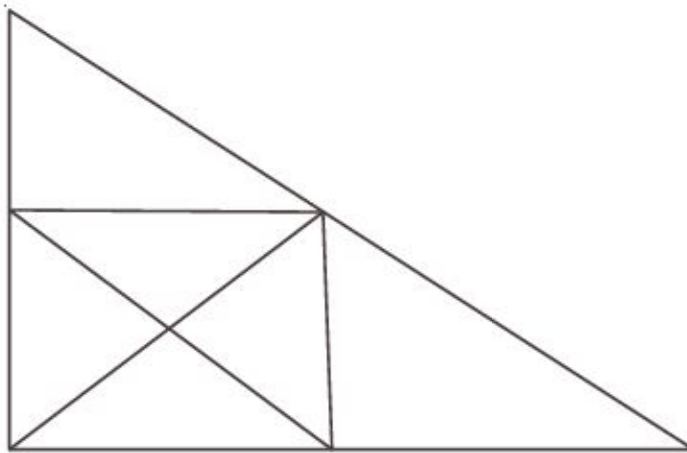
गणित अधिगम किस प्रकार से आनंददायक हो सकता है?

- प्रत्येक विद्यार्थी के अधिगम अनुभव को ध्यान में रखा जाना चाहिए।
- अमूर्त अवधारणा तथा स्थूल वस्तुओं के बीच गणित अधिगम में संबंध स्थापित करें।
- विद्यार्थियों में जिज्ञासा उत्पन्न करने के लिए गणितीय खेल, पहेली और कहानी का प्रयोग करें।



- गणित के जादू विकसित करें इससे विद्यार्थियों में गणित अधिगम के प्रति रूचि बनेगी।
- विभिन्न प्रकार के शिक्षण-अधिगम सामग्री जैसे फ्लेश कार्ड, पत्थर, वस्तुएं, चार्ट कैलेन्डर, ताश के पत्ते, डिब्बे आदि का प्रयोग करें।
- गणितीय प्रश्नोत्तरी, वाद विवाद, कार्यशाला का आयोजन करें।
- महान गणितज्ञों के चित्र संग्रह करना।
- अन्वेषण के द्वारा सीखने के अवसरों को सुनिश्चित करना।
- गणितीय सिद्धान्त और अनुप्रयोग के बीच की दूरी कम करें।
- गणित को जीवन के परिस्थितियों से जोड़े।
- विद्यार्थियों से कहें कि क्षेत्रीय खेल, गाने, नाटक आदि का गणित अधिगम में इस्तेमाल करें।
- विद्यार्थियों को कक्षा कक्ष से बाहर ले जाकर प्रकृति का अवलोकन करने को कहें।
- विद्यार्थियों को स्वतंत्र निर्णय लेने के लिए उत्साहित करें
- विद्यार्थी अधिक गणित सीखेंगे यदि गणित अधिगम मनोरंजक और रूचिपूर्ण होगा।
- विद्यार्थियों पर व्यस्को के विचार न थोपे इससे उनके सृजनात्मक अभिव्यक्ति में बाधा उत्पन्न होता है।

उदाहरण- इस चित्र में कितने समकोण त्रिभुज हैं?



उदाहरण- एक अंक का तीन बार प्रयोग करके 30 लायें।

E-5 आनंददायक गणित अधिगम का एक उदाहरण दें।



टिप्पणी

3.3.4 गणितीयकरण के लिए उपयुक्त अधिगम वातावरण का सृजन

प्राथमिक विद्यालय के अधिकतर विद्यार्थी गणित अधिगम के लिए उत्साह का प्रदर्शन कक्षा कक्ष में नहीं करते हैं। विद्यार्थियों में गणित विषय में असफल होने का भय बना रहता है, और वे कठिन गणितीय समस्याओं का हल निकालने से बचते हैं। अधिकतर अध्यापक अपने समझ से गणित शिक्षण करते हैं न कि विद्यार्थियों के समझ आधार पर। अध्यापक स्वयं गणित शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया में, विश्वस्त नहीं होते हैं। अधिकतर प्राथमिक विद्यालयों में गणित शिक्षण अधिगम का वातावरण अनुपयुक्त है।



क्रियाकलाप-6

क्या आपके गाँव के विद्यालय का वातावरण गणित अधिगम के लिए उपयुक्त है? व्याख्या करें।

शिक्षार्थी के लिए मित्रतापूर्ण वातावरण बनाने के सुझाव:-

बच्चों के बारे में जानना- विद्यार्थियों के बारे में जानकारी रखना सिर्फ गणित अधिगम के लिए महत्वपूर्ण नहीं है वरन यह सम्पूर्ण शिक्षा पद्धति के लिए आवश्यक है। गणित अधिगम में अध्यापक को चाहिए कि (i) वे प्रत्येक विद्यार्थी के बारे में जानकारी रखें (ii) जब विद्यार्थी गणितीय समस्याओं का हल करने का प्रयास करते हैं तो उनको प्रोत्साहन देना चाहिए (iii) छात्रों से उन कार्यों को पूर्ण करने की अपेक्षा न रखें जिन्हें हम स्वयं नहीं कर सकते हैं। (iv) प्रत्येक विद्यार्थी के गणित के समस्या समाधान करने में उसके सबल और निर्बल पक्ष को जानना (v) विद्यार्थियों को गणितीय समस्याओं के समाधान निकालने के लिए पर्याप्त समय दें।

शिक्षण अधिगम कार्यक्रम:- अधिकतर विद्यार्थी सोचते हैं कि गणित एक नीरस विषय है। अध्यापक को चाहिए कि वह ऐसा रूचिपूर्ण शिक्षण अधिगम कार्यक्रम तैयार करें जिससे विद्यार्थियों में गणित अधिगम के प्रति सकारात्मक प्रभाव पड़े एवं सकारात्मक दृष्टिकोण उत्पन्न हो। गणित अध्यापक (i) प्रत्येक दिन गणितीय कहानी, कविता चुटकलों के माध्यम से विद्यार्थियों का अभिवादन करें। (ii) गणित पाठ्यपुस्तक से बाहर जाने की क्षमता रखें। (iii) गणित अभ्यास पर अधिक समय नहीं देना चाहिए (iv) गणितीय अवधारणाओं को समझाने के लिए फ्लेश कार्ड, चित्र, ग्राफ, फ्लो चार्ट, वस्तुओं का इस्तेमाल करें।

शिक्षण-अधिगम उपकरण:- अध्यापक को चाहिए कि वह गणित के पुस्तकों का संग्रह करें, गणित संदर्भ पुस्तके रखे, गणित पत्रिका, कहानी, पहेली और गणित की इतिहास और गणितज्ञों से संबंधित पुस्तकों का संग्रह रखे। अध्यापक को विद्यार्थियों, अभिभावकों और समुदाय के लोगों से गणितीय उपकरण बनाने और संग्रह के बारे में बातचीत करनी चाहिए।

विद्यालय वातावरण:- विद्यालय का वातावरण गणित अधिगम में एक मुख्य भूमिका अदा करता है। विद्यालय का वातावरण ऐसा होना चाहिए कि विद्यार्थी गणित सीखने के लिए उत्साहित रहे। विद्यालय के कक्षा कक्ष के दीवार, बरामदों की दीवारों को इस प्रकार तैयार करें कि उसमें गणितीय अवधारणाओं की स्पष्ट झलक दिखाई दें। गणित से संबंधित नवीन



विचारों को दीवारों पर अंकित करें। प्रार्थना के समय में हम गणितज्ञों के बारे में भी जानकारी दे सकते हैं। कक्षा कक्ष को विद्यार्थियों के कार्यों और अन्य सामग्रियों से सजाना चाहिए।

अधिगम कोना:- कुछ सुविधायें जैसे फ्लेश कार्ड, पत्थर, चित्र, कटआउट, चार्ट, कैलेन्डर, ताश के पत्ते, डिब्बे आदि कक्षा कक्ष में अवश्य ही उपलब्ध होने चाहिए। अध्यापक को चाहिए कि गणित से संबंधित कई क्रियाकलाप तैयार करें, एकत्रित करें और उन्हें अधिगम कोना में अवश्य प्रदर्शित करें। अध्यापक अधिगम कोना का उपयोग आवश्यकतानुसार करें।

मनोरंजक गतिविधियाँ:- मनोरंजक गतिविधियों को हमारे विद्यालयों में उपेक्षित किया जाता है जबकि मनोरंजक गतिविधियों को महत्व देना चाहिए इससे विद्यार्थी प्रेरित होते हैं और विद्यार्थियों में सकारात्मक दृष्टिकोण का विकास करने में सहायता मिलती है। कुछ मनोरंजक गतिविधियाँ इस प्रकार हैं- गणित क्लब की स्थापना करना, गणित प्रश्नोत्तरी, प्रश्न बैंक का विकास (लिखित, मौखिक, कार्य निष्पादन)। मौखिक अंकगणित पर प्रतियोगिता का आयोजन करना, गतिविधि संग्रह, ओलिम्पियाड प्रश्नों का उत्तर, समृद्ध तथा सुधारात्मक अधिगम सामग्री।

आकलन:- विद्यार्थी अभ्यास सत्रों के दौरान अपने उपलब्धियों का अवश्य मूल्यांकन करें। यदि विद्यार्थी गलत उत्तर देते हैं तो उन्हें शर्मिन्दा न करें, आवश्यक क्षमताओं का पूर्ण विकास करे तत्पश्चात् अगले क्षमता विकास की ओर बढ़े। अभ्यास सत्र किसी भी स्थिति में विद्यार्थी के अधिगम के रास्ते में अवरोध उत्पन्न न करें। सुनिश्चित करें कि विद्यार्थी अभ्यास सत्र में कुछ न कुछ सीखें और सकारात्मक दृष्टिकोण का विकास करें। शारीरिक दंड न दें विद्यालय दंड रहित क्षेत्र होना चाहिए।

3.4 सारांश

- गणित की शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बच्चों की गणितीयकरण की क्षमताओं का विकास करना है, इसमें शामिल है समस्या समाधान, स्थिति विश्लेषण, अनुमान, सन्निकटता, इष्टीकरण, सादृश्यता, प्रस्तुतीकरण तर्कशीलता और प्रमाण, गणितीय संबंध और संप्रेषण।
- इसका उच्चतर उद्देश्य है बच्चों के संसाधन को समृद्ध करना जिससे वे गणितीय ढंग से सोच सकें और तर्क कर सकें, मान्यताओं के तार्किक परिणाम निकाल सकें और अमूर्तों को समझ सकें। समस्याओं को सूत्रबद्ध करने और सुलझाने की क्षमता का विकास करना।
- विद्यालयी गणित का सीमित लक्ष्य है. लाभप्रद क्षमताओं का विकास विशेषकर अंक ज्ञान-संख्या से जुड़ी क्षमताएँ, सांख्यिक सक्रियाएँ, माप, दशलमव व प्रतिशत।
- गणित की शिक्षा के विशिष्ट उद्देश्य बच्चों के ज्ञानात्मक, भावात्मक, वेगात्मक आयामों के आधार पर (माध्यम) उचित पाठ्यक्रम विधियाँ, शिक्षण-अधिगम सामग्री तैयार करना, मूल्यांकन प्रश्न तैयार करने में सहायता करता है। यह वांछनीय है कि विशिष्ट उद्देश्य को जो सुस्पष्ट, सटीक और क्रियान्वन और उपलब्धि करने योग्य होना चाहिए, लिखित रूप में रखें।



- विद्यालयी गणित का परिप्रेक्ष्य, राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 में इस आशा के साथ बनाया गया है कि प्रत्येक विद्यार्थी के गणित में सफलता उसके अधिकार के रूप में देखा जाए, विद्यार्थी आनंदपूर्वक गणित अधिगम करें और इसके अमूर्तता, आधारभूत संरचना और पारस्परिक संबंधों को अनुभव करने की क्षमता हासिल करें।
- बच्चे केवल अध्यापक से ही नहीं सीखते हैं, वे अपने मित्रों व अन्य बच्चों के साथ बातचीत करके तथा अपने आसपास के परिवेश, प्रकृति, वस्तुओं और सक्रिय भागीदारी तथा भाषा से भी सीखते हैं।
- उद्देश्य है विद्यालयी शिक्षा को आनंददायक बनाना, जिससे विद्यार्थी कक्षा के भीतर तथा कक्षा से बाहर रह कर विभिन्न सामग्रियों का इस्तेमाल करके अपने अनुभवों को समृद्ध कर सकें।
- गणितीय सिद्धान्त और व्यावहारिक गणित के बीच की दूरी कम करना इसके लिए गणित अधिगम को जीवन के विभिन्न स्थितियों से जोड़ना आवश्यक है।

3.5 आपके प्रगति की जाँच के लिए आदर्श उत्तर

- E-1 : ध्यान केन्द्रित, स्वावलम्बन, स्व अभिव्यक्ति तथा अन्वेषक आदतों का विकास करना। चिंतन एवं तर्कशीलता योग्यताओं का उपयोग करके दैनिक जीवन के गणितीय समस्याओं का तल करने की क्षमता का विकास करना अपने वातावरण और संस्कृति को जानना समझना तथा परिचित होना। बच्चे को भविष्य के तकनीकी और सामान्य व्यवसाय के लिए तैयार करना। बच्चे में अन्वेषणात्मक क्षमता का विकास करना।
- E-2 : गणित शिक्षा का विशिष्ट उद्देश्य, उचित पाठ्यक्रम, विधियाँ, TLM तैयार करने की रूपरेखा, मूल्यांकन प्रश्न तैयार करने में सहायता करता है।
- E-3 : iii, iv, vi, vii और xi गणित के अनुदेशनात्मक उद्देश्य हैं?
- E-4 : शैक्षणिक भ्रमण, गणितीय खेल, पहेलियाँ और कहानियाँ, गणित को जीवन के स्थितियों से जोड़ना, विश्लेषण आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण और व्याख्या करना, प्रतिरूपों को पहचानना, अभिव्यक्त करना तथा व्याख्या करना, अनुमानित और सन्निकटन के द्वारा समस्या समाधान करना।
- E-5 : एक और केवल एक ही अंक को 5 (पाँच) बार इस्तेमाल करके 100 उत्तर लायें।
 $5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100$



3.6 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

- "प्राथमिक विद्यालयों में गणित शिक्षण" By Ediger, Marlow and Rao, D.B. (2004) नई दिल्ली डिस्कवरी प्रकाशन हाउस, By Gagne R.M. (1985) New York CBS Collage Publishing
- "शिक्षण के माडल्स" By Joyee, Bruce, and Weil, Marsha (1996) Neeham Heights, M.A.: Simon and Schuster.
- "प्रारम्भिक वर्ष: पाठ्यचर्या रूपरेखा (पार्ट II)" नई दिल्ली, NCERT
- NCERT (2005) : राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 नई दिल्ली, NCERT
- NCERT (2008) : प्राथमिक विद्यालयों में गणित अधिगम के आकलन के लिए स्रोत पुस्तिका, नई दिल्ली NCERT
- NCERT (1995) : Self instructional package for special orientation Programme for Primary School teachers. New Delhi, NCERT
- NCTE (1999) : Example Modules in mathematics, New Delhi, NCTE
- The Teaching of Mathematics by Sidhu Kulbir Singh (1989), New Delhi :7 Sterling.

3.7 अन्त्य-इकाई अभ्यास

- (i) जो गणित के बारे में कुछ भी नहीं जानता है उसे किस प्रकार की समस्याओं का सामना करना पड़ेगा?
- (ii) शिक्षण उद्देश्य और शिक्षागत उद्देश्य के बीच में अंतर स्पष्ट करें।
- (iii) प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के उद्देश्यों की चर्चा करें।
- (iv) प्राथमिक विद्यालय गणित के परिप्रेक्ष्य का वर्णन कीजिये।
- (v) अपने आसपास के परिवेश से दस ऐसे उदाहरण चुने जिसे गणित शिक्षण करते समय कक्षा कक्ष में उपयोग किया जा सके।



इकाई-4 अधिगमकर्ता एवं अधिगम केंद्रित विधियाँ

संरचना

- 4.0 प्रस्तावना
- 4.1 अधिगम उद्देश्य
- 4.2 गणित अधिगम एवं शिक्षण की प्रणाली/पद्धति
 - 4.2.1 आगमन एवं निगमन
 - 4.2.2 विश्लेषण एवं संश्लेषण पद्धति
 - 4.2.3 परियोजना पद्धति
 - 4.2.4 समस्या समाधान एवं समस्या उठाना
- 4.3 गणित शिक्षण के अधिगम केंद्रित अधिगमन
 - 4.3.1 पांच अधिगम प्रतिरूप
 - 4.3.2 प्रतिरूप की रूपरेखा की संरचना की व्याख्या करना
 - 4.3.3 अवधारणा का खाका तैयार करना
 - 4.3.4 क्रियाकलाप आधारित
- 4.4 गणित अधिगम को अधिक चुनौतीपूर्ण एवं संतोषजनक बनाना
 - 4.4.1 बच्चे की सृजनात्मक योग्यता को विकसित करना
 - 4.4.2 गणित प्रयोगशाला एवं पुस्तकालय का उपयोग
- 4.5 सारांश
- 4.6 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर
- 4.7 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें
- 4.8 अन्त्य-इकाई अभ्यास

4.0 प्रस्तावना

प्रारम्भिक स्तर पर गणित शिक्षण में आपके पास अनेकों अनुभव हैं। आपने ये अवश्य महसूस किया होगा कि प्रारम्भिक स्तर पर छोटे बच्चों को गणित सिखाना कोई आसान कार्य नहीं है।



बच्चों के लिए गणित शिक्षण को ज्यादा अर्थपूर्ण बनाना विशेष रूप से चुनौतीपूर्ण है। प्रायः, अधिकतर व्यक्ति ये मानते हैं कि गणित एक कठिन विषय है और इसी भाव को हम अपने बच्चों पर भी लाद देते हैं। इसके अतिरिक्त गणित शिक्षण में पाठ्य पुस्तकों पर ज्यादा जोर दिया जाता है, गणित शिक्षण में बच्चों के पूर्व ज्ञान का ठीक प्रकार से विचार किये बिना, गणित अधिगम में उनकी रूचि जाने बिना, उनकी अधिगम आवश्यकता जाने बिना और उनके अधिगम के तरीकों को जाने बिना हम रटन्त अधिगम पर ज्यादा बल देते हैं। इस प्रकार का रटन्त अधिगम गणितीय अवधारणा की समझ को केवल ज्यादा कठिन ही नहीं बनाता बल्कि गणित में भय उत्पन्न करता है जो आगे चलकर गणित सीखने में बाधा उत्पन्न करता है। विद्यालय के सभी विषयों में गणित विषय सबसे अधिक व्यवस्थित और सबसे अधिक संगठित संरचना है। इस विशेषता के अतिरिक्त, प्रारम्भिक स्तर के गणित में जो अवधारणा शामिल की गयी है, वो अवधारणा बच्चों के मूर्त वास्तविक जीवन के अनुभवों से प्रगाढ़ रूप से संबंधित है। यदि हम यह जानते हैं कि गणितीय अधिगम की अवधारणा को दैनिक जीवन के उपयोग के साथ कैसे जोड़ा जाता है, और विद्यार्थी के अनुभवों के संदर्भ में उसकी इन योग्यताओं, तार्किकता, विश्लेषण करना और निष्कर्ष निकालने को सक्रिय कर पाते हैं तब गणित अधिगम बच्चे के लिए ज्यादा अर्थपूर्ण, प्रासंगिक और रूचिकर होगा। इस योग्यता को प्राप्त करने के लिए, विशेष रूप से गणित के शिक्षण एवं अधिगम के लिए, एक अध्यापक को अनेकों विधियों एवं प्रक्रियाओं से परिचित होने की आवश्यकता होती है।

यह इकाई प्रारम्भिक विद्यालय स्तर पर गणित शिक्षण एवं अधिगम की विद्यार्थी केंद्रित एवं अधिगम केंद्रित पद्धतियों एवं प्रणालियों की चर्चा पर केंद्रित है। इसके अतिरिक्त हम आपको गणित शिक्षण की परंपरागत पद्धतियों से भी परिचित कराने की कोशिश करेंगे और जिसकी प्रासंगिकता लगातार बनी हुई है।

इस इकाई के अध्ययन एवं इसमें अंतः स्थापित अवधारणा को समझने के लिए, आपको कम से कम सात (7) अध्ययन कालांशों की आवश्यकता होगी।

4.1 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो जायेंगे कि—

- प्रारम्भिक स्तर पर गणित अधिगम एवं शिक्षण की विभिन्न विधियों एवं पद्धतियों की पहचान कर सकेंगे।
- अपने कक्षा-कक्ष में गणित को अधिगम आधारित विधियों एवं पद्धतियों को ग्रहण कर सकेंगे।
- विद्यालय में गणित अधिगम को ज्यादा अर्थपूर्ण, चुनौतीपूर्ण और संतोषजनक बनाने के लिए अनेकों क्रियाकलापों को संगठित कर सकेंगे।



टिप्पणी

4.2 गणित अधिगम एवं शिक्षण के लिए विधियाँ

एक क्षण के लिए सोचिए जब आप गणित की कक्षा में होते हैं और गणित की किसी अवधारणा को बच्चों को सिखाने की शुरुआत में बच्चों का ध्यान विषय वस्तु की ओर आकर्षित करते हैं, तब आप इस अवधारणा की व्याख्या अनेक प्रकार की सामग्री को प्रदर्शित करके, क्रियाकलापों के द्वारा या ऐसी ही कोई अन्य क्रियाकलापों के द्वारा करने की कोशिश करते हैं, विद्यार्थियों की सक्रिय सहभागिता से अवधारणा को स्पष्ट करते हैं और अंत में विद्यार्थियों का आकलन करने के लिए कुछ प्रश्न पूछते हैं जैसा कि आपने इच्छा की होगी कि बच्चों ने अवधारणा को सीखा है या नहीं। आपने अपने शिक्षण में उचित क्रमबद्धता का पालन किया है प्रायः जिसे शिक्षण की विधि कहते हैं। विधि, पाठ्यवस्तु को कक्षा कक्ष में प्रस्तुत करने का एक तरीका है। आपके शिक्षण का तरीका और आपके पाठ प्रस्तुत करने का तरीका हमेशा एक जैसा होता है। यह पाठ्यवस्तु की प्रकृति पर बच्चों के सीखने के तरीके पर और आपके कक्षा-कक्ष में उपलब्ध संसाधनों पर भी निर्भर करता है। इन तथ्यों के आधार पर, गणित में अलग-अलग समय पर, अलग-अलग अवधारणाओं के शिक्षण के लिए आप अलग-अलग विधियों का उपयोग करते हैं। यहां हम ऐसी ही विधियों की चर्चा करते हैं जिसका उपयोग विशेषतः हमारे गणित शिक्षण के कक्षा-कक्ष में होता है।

4.2.1 आगमन-निगमन विधि

यह शायद गणित सीखने के साथ-साथ शिक्षण की सबसे पुरानी और ज्यादा मौलिक विधि है। गणित की अन्य सभी विधियों में इस विधि विभिन्न मात्राओं में उपयोग किया जाता है। यह दो विधियों आगमन एवं निगमन विधियों का संयोजन है।

आगमन विधि—आगमन, तार्किकता का एक रूप है, जिसमें विशेष उद्देश्य या विशिष्ट प्रविधि के अध्ययन से एक सामान्य नियम या सिद्धान्त की व्युत्पत्ति की जाती है। आगमन तर्कों पर आधारित है जैस प्रकार यदि कोई चीज विशेष स्थिति में सत्य है और आगे की स्थितियों में भी पर्याप्त संख्या में तार्किक रूप से सत्य है तब ये ऐसी सभी स्थितियों में सत्य है। विद्यार्थी ऐसी स्थितियों के बीच के संबंधों का अवलोकन करते हैं, जो उन्हें एक समान प्रतिरूप का अनुमान लगाने की ओर अग्रसारित करता है। इस प्रकार आगमन तर्कक्षमता की विधि से होकर एक सूत्र या एक 'सामान्यीकरण' को प्राप्त करते हैं। आओ कुछ उदाहरणों का अध्ययन करते हैं—

उदाहरण-1

- (a) $1^2 = 1, 3^2 = 9, 5^2 = 25, 7^2 = 49, \dots$ जहां पर 1, 3, 5 और 7 विषम संख्याएं हैं और 1, 9, 25, 49, उनकी क्रमशः वर्ग संख्याएं भी विषम संख्याएं हैं।
- (b) $2^2 = 4, 4^2 = 16, 6^2 = 36, 8^2 = 64, \dots$ जहां पर 2, 4, 6, 8, सम संख्याएं हैं और 4, 16, 36, 64, उनकी क्रमशः वर्ग संख्याएं हैं जो कि सम संख्याएं हैं।



उदाहरण (a) से हमें “विषम संख्या का वर्ग एक विषम संख्या ही होती है।” प्राप्त होता है और उदाहरण (b) से हमें, “सम संख्या का वर्ग एक सम संख्या होती है।” प्राप्त होता है।

उदाहरण-2

$1+1 = 2$; $1+3 = 4$; $1+5 = 6$; $3+5 = 8$; जहां पर 1, 3, 5 विषम संख्याएं हैं और उनका योगफल क्रमशः 2, 4, 6, 8 सम संख्याएं हैं। हम इस योग से इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि दो विषम संख्याओं का योगफल एक सम संख्या होती है।



क्रियाकलाप-1

परीक्षण करते हैं कि यह सामान्यीकरण निम्न के लिए सत्य है या नहीं—

(1) तीन विषम संख्याओं के योग के लिए।

.....

(2) सम/विषम संख्याओं का योग विषम संख्या के साथ।

.....

उदाहरण-3

(1) $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a^5 = a^{2+3}$

(2) $a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^7 = a^{3+4}$

(3) $a^3 \times a^6 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a \times a) = a^9 = a^{3+6}$ आदि।

इन उदाहरणों से हम इस निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं कि

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= (a \times a \times \dots \dots \dots m \text{ बार}) \times (a \times a \times \dots \dots \dots n \text{ बार}) \\ &= a \times a \times \dots \dots \dots (m + n) \text{ बार} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

E-1 उपरोक्त तालिका 4.1 से, दो आसन्न कोणों की मापों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

E-2 उचित उदाहरणों के द्वारा, दो वास्तविक संख्याओं के योग के वर्ग का आगमन निष्कर्ष निकालिए।



टिप्पणी

निगमन विधि—इस विधि में बच्चा सामान्य से विशिष्ट की ओर, अमूर्त से मूर्त (स्थूल) की ओर और सूत्र से उदाहरण की ओर के बारे में सीखता है। इसमें विद्यार्थी को पहले से संरचित सूत्र या सिद्धांत बताया जाता है। और उनसे विभिन्न संबंधित समस्याओं को पहले से ज्ञात सूत्र की सहायता से हल करने के लिए कहता है। इस विधि में पहले आप बच्चे को कोई संबंधित सूत्र, सिद्धांत और विचार देते हैं और आगे किसी समस्या में इस सूत्र के उपयोग की व्याख्या करते हैं। आपकी कक्षा के विद्यार्थी समझते हैं कि कैसे इस सूत्र का उपयोग कर सकते हैं? एवं इसे कैसे इसे लागू कर सकते हैं? जैसे—जब आप लाभ और हानि का शिक्षण करने के लिए जाते हैं तो आप ब्याज का सूत्र बताते हैं जैसे कि $I = PTR/100$ और विभिन्न संबंधित समस्याओं को सूत्र की सहायता से हल करते हैं। विद्यार्थी आपके द्वारा हल करने की विधि का अवलोकन करते हैं और इस सूत्र को आगे उपयोग हेतु याद करते हैं।

निगमन प्रणाली को जारी रखने का तरीका—

- सामान्य नियम से विशिष्ट उदाहरण की ओर।
- अमूर्त नियम से स्थूल उदाहरण की ओर।

शिक्षण में निगमन प्रणाली, प्रभावशाली शिक्षण के लिए नीचे दिये गये निम्न सोपानों का अनुसरण करती है—

- समस्या की सही ढंग से पहचान करना।
- अस्थायी परिकल्पना के लिए खोज करना।
- अस्थायी परिकल्पना के लिए सूत्रीकरण करना। हल ज्ञात करने के लिए प्रासंगिक सूत्र का चुनाव करना।
- समस्या को हल करना।
- परिणाम की जांच करना।

उदाहरण-1 $a^2 \times a^{10} = ?$ प्राप्त कीजिए।

घातांक के नियम से, यह जाना जाता है कि $a^m \times a^n = a^{m+n}$ अतः $a^2 \times a^{10} = a^{2+10} = a^{12}$ (यहां $m = 2$ और $n = 10$)

उदाहरण-2 $(102)^2 = ?$ प्राप्त कीजिए।

हम जानते हैं कि $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$\begin{aligned}(100+2)^2 &= 100^2 + 2^2 + (2 \times 100 \times 2) \text{ (यहां पर } a = 100 \text{ और } b = 2 \text{)} \\ &= 10,000 + 4 + 400 \\ &= 10404\end{aligned}$$



हम 102 को इसी संख्या से भी गुणा करके समान परिणाम प्राप्त कर सकते हैं। (पूर्व परिणाम की सटीकता की जांच करने के लिए)

आगमन एवं निगमन विधि प्रारम्भिक स्तर पर गणित शिक्षण की, दो प्रणालियों का संयोजन है। मूलतः आगमन विधि की शुरुआत विशिष्ट उदाहरणों के प्रस्तुतीकरण के साथ होती है और सामान्य सिद्धांतों की संरचना के साथ समाप्त होती है। इसके विपरीत, निगमन विधि की शुरुआत सामान्य सिद्धांतों के प्रस्तुतीकरण के साथ होती है और अंत विशिष्ट उदाहरणों के सामान्यीकरण के साथ होता है।

आगमन विधि, एक जैसे उदाहरणों में समान पदों के अवलोकन के द्वारा, बच्चों की तर्क की योग्यता को विकसित करने में, सहायता करती है और सामान्य नियम या तथ्य तक पहुंचाती है। निगमन विधि विभिन्न गणितीय समस्याओं को हल करने में सभी स्थापित नियमों और सूत्रों को लागू करती है। गणित की पाठ्यपुस्तक की लगभग सभी समस्याओं को निगमन विधि के प्रयोग से हल किया जा सकता है।

E-3 स्थूल उदाहरणों के अवलोकन से, सूत्रों/नियमों/सिद्धांतों के सामान्यीकरण या स्थापत्य के सिद्धांत पर आधारित विधि को कहते हैं।

E-4 कौन सी विधि, समस्याओं के हल में सूत्रों के प्रत्यक्ष उपयोग पर केंद्रित है?

4.2.2 विश्लेषणात्मक एवं संश्लेषणात्मक विधि

आपके पास ज्यामितीय और बीजगणित की विभिन्न अवधारणाओं के बारे में अनेक अनुभव हैं जहां पर विद्यार्थी तर्क पूर्ण अनुक्रम को जारी रखते हैं जैसे—दिया है 'A' सत्य है, इसीलिए 'B' सत्य है, अतः 'C' सत्य है। यहां 'A' की सत्यता की जानकारी है और 'C' की स्थिति अज्ञात है और इसकी सत्यता को सुनिश्चित करने की आवश्यकता है। 'A' से 'C' तक की प्रक्रिया को जारी रखना ही संश्लेषण है। लेकिन अन्य तरीके से, कभी-कभी विद्यार्थी अज्ञात से ज्ञात का अनुसरण करते हैं। जैसे—'C' सत्य है यदि 'B' सत्य है; B सत्य है यदि 'A' सत्य है। अज्ञात 'C' से ज्ञात 'A' की प्रक्रिया का पालन करना, विश्लेषणात्मक विधि कहलाती है।

विश्लेषणात्मक विधि में हम अज्ञात समस्या को आसान भागों में विभाजित करते हैं और तब देखते हैं कि कैसे इन्हें, हल प्राप्त करके, पुनः संयोजित कर सकते हैं। इसलिए हम यहां से शुरू करते हैं, कि हमें प्राप्त क्या करना है? और तब अगले कदम या संभावना के बारे में सोचते हैं, जो अज्ञात को ज्ञात बनाने से संबंधित हो सकती है, और ऐच्छिक परिणाम प्राप्त करते हैं। विश्लेषणात्मक विधि की प्रकृति इस प्रकार है—

- ये निष्कर्ष से परिकल्पना की ओर अग्रसारित होती है।
- ये विधि अज्ञात से ज्ञात की ओर चलती है।



टिप्पणी

उदाहरण- यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ सिद्ध कीजिए $\frac{ac-2b^2}{b} = \frac{c^2-2bd}{d}$

निम्नलिखित विश्लेषणात्मक विधि के द्वारा हमें सिद्ध क्या करना है। यहां से शुरू करते हैं और निम्न की तरह से प्रक्रिया को जारी रखते हैं-

यदि $\frac{ac-2b^2}{b} = \frac{c^2-2bd}{d}$ सत्य है (हम सुनिश्चित नहीं हैं) तब

$$\begin{aligned} d(ac-2b^2) &= b(c^2-2bd) \quad \text{जो इंगित करता है (दोनों ओर का सरलीकरण करने पर)} \\ acd-2b^2d &= bc^2-2b^2d \quad \text{सत्य होगा जो सूचित करता है} \\ acd &= bc^2 \quad \text{सत्य होगा, जो इंगित करता है} \\ ad &= bc \quad \text{सत्य होगा, इस संबंध से यह इंगित करता है कि} \end{aligned}$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ सत्य होगा, जो दी गयी शर्त है।

“इंगित करने” को पढ़ने के स्थान पर गणितीय चिह्न “ \Rightarrow ” का प्रयोग करते हुए, हम विश्लेषणात्मक उत्पत्ति को ज्यादा स्पष्ट ढंग से लिख सकते हैं जो निम्नलिखित है-

$$\frac{ac-2b^2}{b} = \frac{c^2-2bd}{d} \Rightarrow d(ac-2b^2) = b(c^2-2bd) \quad (\text{वज्र गुणन विधि से})$$

$$\Rightarrow acd-2b^2d = bc^2-2b^2d \quad (\text{गुणन एवं सरलीकरण से})$$

$$\Rightarrow acd = bc^2 \quad (\text{दोनों ओर से समान पद '-2b^2d' को रद्द करने पर})$$

$$\Rightarrow ad = bc \quad (\text{दोनों ओर 'c' से भाग देने पर जहां 'c' शून्य के बराबर नहीं है।})$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (\text{दोनों ओर 'bd' से भाग देने पर})$$

जब यहां उपरोक्त शर्त वैध दी गयी है, तब उपरोक्त विश्लेषण के आधार पर

$$\frac{ac-2b^2}{b} = \frac{c^2-2bd}{d} \text{ भी वैध है।}$$

विश्लेषणात्मक तथ्यों को किसी समस्या की जांच के तथ्यों के आधार पर नहीं देखा जाता है, बल्कि विश्लेषण को सत्य की खोज की तरह देखा जाता है।

संश्लेषण विधि, किसी समस्या का हल उपलब्ध कराती है। संश्लेषण विधि में क्या ज्ञात है, और प्रदान करने के लिए, क्या आवश्यक है, इससे शुरुआत की जाती है। संश्लेषण करने से तात्पर्य



उन चीजों को एक साथ रखने से है, जो दूर-दूर होती हैं। इसकी शुरुआत उपलब्ध या ज्ञात आंकड़ों से की जाती है और उनको उसी तरह से निष्कर्ष के साथ जोड़ दिया जाता है। यह ज्ञात छोटी-छोटी सूचनाओं को एक साथ रखने की प्रक्रिया है, जिससे उस निर्धारित बिंदु पर पहुंचा जाता है जहां अज्ञात सूचनाएं समझने में आसान और सत्य हो जाती है।

उपरोक्त दिये गये एक उदाहरण पर विचार करते हैं

$$\text{यदि } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ सिद्ध करो } \frac{ac - 2b^2}{b} = \frac{c^2 - 2bd}{d}$$

इस समस्या को संश्लेषणात्मक विधि से इस प्रकार हल करते हैं—

$$\text{दिया है } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \text{ (वज्र गुण से)}$$

$$\Rightarrow acd = bc^2 \text{ ['c' से दोनों ओर गुणा करने पर जहां 'c' शून्य के बराबर नहीं है]}$$

$$\Rightarrow acd - 2b^2d = bc^2 - 2b^2d \text{ [दोनों ओर '-2b^2d' जोड़ने पर]}$$

$$\Rightarrow d(ac - b^2) = b(c^2 - 2bd) \text{ [दोनों ओर 'bd' से भाग देने पर]}$$

यह संश्लेषणात्मक विधि से सिद्ध करने का तरीका है जिसे हम अक्सर गणित की पाठ्यपुस्तकों व साहित्य में पाते हैं। यह विधि सुस्पष्ट, उचित अनुक्रम में तर्कपूर्ण ढंग से व्यवस्थित और पढ़ने व संप्रेषण के लिए सरल है।

संश्लेषण विधि में कुछ अत्यवस्थित सा दिखायी देता है जबकि वास्तव में ऐसा नहीं होता है। बहुत लोगों की यह राय है कि संश्लेषण विधि से हम सत्य को प्राप्त करते हैं, जबकि यह विधि हमें सत्य को खोजने का मार्ग प्रदान करती है। इस स्थिति में, विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि एक दूसरे के लिए संपूरक का कार्य करती है।

विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि को गणित की कुछ ऐसी समस्याओं में लागू किया जाता है, जिनमें “यदि-तब” प्रकार के तर्क की आवश्यकता होती है। ('यदि' एक त्रिभुज समद्विबाहु है, 'तब' सिद्ध करो कि समान लम्बाई की भुजा के सामने के कोण आपस में बराबर होते हैं।) इस प्रकार की समस्याओं में, कुछ शर्तें (परिकल्पना) दी जाती हैं और उन शर्तों के आधार पर कुछ संबंधों को सिद्ध करना होता है। ज्यामितीय संबंधों को सिद्ध करने में, बीजगणितीय राशियों में और बीजगणितीय समस्याओं को हल करने में इन विधियों का प्रभावशाली उपयोग किया जा सकता है।

4.2.3 परियोजना विधि

आपकी कक्षा-कक्ष में ऐसे अनेकों बच्चे होते हैं जो गणित पाठ्यपुस्तक की समस्याओं को हल करने में अच्छे होते हैं। उनमें से भी आपको बहुत से बच्चे ऐसे मिलेंगे जो अपनी दैनिक जीवन



टिप्पणी

से जुड़ी हुई समस्याओं को हल करने में असमर्थ हैं, जबकि पाठ्यपुस्तक एवं दैनिक जीवन की समस्याओं के हल समान हैं। एक उदाहरण लेते हैं—

विद्यार्थी पाठ्यपुस्तक में लाभ और हानि पर आधारित समस्याओं के हल से परिचित है, लेकिन इसी ज्ञान को बाजार में, लेन-देन करते समय उपयोग करने में वे असफल हो जाते हैं। इसके लिए कक्षा-कक्ष में गणित शिक्षण जिम्मेवार है। विद्यार्थी को दिन के अनेक घंटे विषयों की पाठ्यपुस्तकों को दैनिक जीवन में उनके मूल्यों को समझने की अपेक्षा, सीखने एवं रटने में व्यतीत कराया जाता है। वास्तव में गणित अधिगम एक बच्चे को वास्तविक जीवन जीने के लिए उसके जीवन को तैयार करता है और उसे ऐसे अवसर प्रदान करता है, जहां पर वह अपने सोचने एवं करने के कौशल की योग्यता का अभ्यास कर सकता है। इसीलिए, वास्तविक अनुभव प्राप्त करने के लिए, परियोजना के द्वारा अधिगम एक महत्वपूर्ण पहलू है।

परियोजना आधारित अधिगम एक विद्यार्थी केंद्रित विधि है, जिसमें विद्यार्थी को कक्षा-कक्ष के बाहर, स्वयं के द्वारा कुछ करने के लिए, चुनौती होती है। परियोजना आधारित अधिगम एक व्यक्तिगत या समूह क्रियाकलाप है, जो कुछ समय तक चलता है, जिसका परिणाम उत्पादकता के रूप में होता है, तथा जिसमें प्रस्तुतीकरण या प्रदर्शन भी होता है। एक गणित की परियोजना में समृद्ध क्रियाकलाप, सक्रिय सहभागिता, विद्यार्थियों को स्वतंत्रता और अन्य विषयों के साथ सहसंबंध शामिल होता है। परियोजना आधारित अधिगम में एक शिक्षक का पहला कार्य परियोजना के क्षेत्र की पहचान करना होता है। तब शिक्षक, बच्चों को उनकी रुचि के हिसाब से विभिन्न समूहों में परियोजना के क्षेत्रों को विभाजित करता है। परियोजना आधारित अधिगम निम्न सोपानों का अनुसरण करता है—

- परिस्थिति, प्रदान करना।
- चुनाव करना एवं प्रस्तावित करना।
- परियोजना की योजना बनाना।
- परियोजना को कार्यान्वित करना।
- परियोजना का मूल्यांकन।
- परियोजना का अभिलेख करना।

कक्षा-VIII के विद्यार्थियों के लिए, आप इस प्रकार की परियोजना निर्धारित कर सकते हैं जैसे—अपने विद्यालय के सहकारी बैंक में भ्रमण, विद्यालय का बगीचा तैयार करना, एक भवन के निर्माण व खर्च का अनुमान लगाना आदि। इस विधि के बारे में और विस्तार से जानने के लिए आप, विद्यार्थियों को इस कोर्स की इकाई-14 के पृष्ठ-3 के लिए संदर्भित कर सकते हैं।

E-5 गणित में परियोजना की मौलिक विशेषताओं की पहचान कीजिए।

E-6 ज्यामितीय प्रमेय की उत्पत्ति को किस विधि से प्रस्तुत किया गया है जो पाठ्यपुस्तक में दी गयी विधि के बिल्कुल विपरीत है?



4.2.4 समस्या-समाधान एवं समस्या प्रस्तुतीकरण विधि

आप जानते हैं कि गणित में समस्या समाधान एक महत्वपूर्ण कौशल है जिसकी बच्चों से उम्मीद की जाती है। यह हमेशा संभव नहीं है कि किसी बने-बनाये सूत्र का उपयोग करके, समस्या का समाधान निकाला जा सके। इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के क्रम में, समस्या की प्रकृति की पहचान करके, विभिन्न स्रोतों से सूचनाओं को एकत्र करके, सूचनाओं का विश्लेषण और व्याख्या करके, किसी समस्या के समाधान तक पहुंचते हैं।

इसलिए समस्या समाधान विधि एक ऐसी विधि है जिसमें एकत्रीकरण, संगठन, विश्लेषण और सूचनाओं की व्याख्या करने का कौशल, आदि सभी समस्या का हल प्राप्त करने में, शामिल है। आपने ये अनुभव किया होगा कि गणित में किसी समस्या का हल, कम से कम प्रारम्भिक विद्यालय स्तर पर हल करने का एक ही रास्ता होता है, लेकिन किसी समस्या के हल तक पहुंचने के एक से अधिक रास्ते होते हैं। ये आप योग के एक साधारण उदाहरण में देख सकते हैं।

माना कि विद्यालय के कक्षा-II के विद्यार्थियों को $75+29$ को ज्यादा से ज्यादा संभव तरीकों से हल करने के लिए दिया जाता है। आओ देखते हैं कि कितने तरीकों से इस समस्या को हल किया जा सकता है:-

I $75 + 29 = 104$ [प्रत्यक्ष विधि के द्वारा]

II $75 + 29 = 75 + (30-1) = (75 + 30) - 1 = 105 - 1 = 104$

III $75 + 29 = 74 + 1 + 29 = 74 + 30 = 104$

IV $75 + 29 = 75 + 25 + 4 = 100 + 4 = 104$

ये सभी प्रक्रियाएं ठीक हैं। इसलिए जब हम किसी गणितीय समस्या को हल करना सिखाते हैं, तो हमें इन समस्याओं को हल करने के विभिन्न तरीकों से परिचित होना आवश्यक है। प्रत्येक विद्यार्थी को इस के बारे में जागरूक करना चाहिए कि प्रत्येक गणितीय समस्या को विभिन्न तरीकों से हल किया जा सकता है। और उन्हें किसी समस्या को हल का वैकल्पिक विधियों को सीखने के बारे में भी उत्साहित करना चाहिए। वैकल्पिक विधियों के द्वारा समस्या का हल करना सीखने से बच्चों में चिंतनात्मक एवं सृजनात्मक सोच की योग्यता का विकास होता है। इसलिए समस्या-समाधान विधि का मुख्य उद्देश्य, बच्चों की चिंतनात्मक और सृजनात्मक सोच का उद्दीपन करना है। गणित में किसी समस्या को हल करने के क्रम में, एक बच्चे को निम्नलिखित सोपानों का अनुसरण करने की आवश्यकता है-

- समस्या की पहचान करना :** किसी समस्या को हल करना, शुरू करने से पहले, बच्चे में समस्या को पहचानने की योग्यता होनी चाहिए।
- समस्या को परिभाषित करना :** जब कोई विद्यार्थी किसी समस्या को अपने शब्दों में पुनः शुरू करता है, तो उसे समस्या को समझने में सहायता मिलती है जैसे कि समस्या में दिया क्या है? और करना क्या है?



टिप्पणी

- c. **उपयोगी सूचनाओं का एकत्रीकरण करना** : इस सोपान में विद्यार्थी, समस्या को हल करने में आवश्यक, संबंधित सूचनाओं को एकत्र करता है। पूर्व अधिगमित ज्ञात जैसे तथ्य, कौशल, प्रमेय और प्रक्रिया आदि का पुनः स्मरण करता है, बच्चा समस्या से संबंधित कोई जानकारी सीखने के लिए अपने अध्यापक से कह सकता है। जैसे—ऊंचाई और दूरी की एक समस्या में, एक बच्चा त्रिकोणमितीय अनुपातों को पुनः सीखता है।
- d. **अस्थायी परिकल्पना का निर्माण करना** : यह अवस्था, परिकल्पना निर्माण अर्थात समस्या के अस्थायी समाधान को खोजने पर केंद्रित होती है। जैसे—जब विद्यार्थी शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना शुरू करता है, तब वह परिकल्पना बना सकता है कि शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आधार के क्षेत्रफल का योग होता है।
- e. **परिकल्पना की जांच करना** : किसी समस्या के हल के लिए चुनी गयी अस्थायी परिकल्पना की जांच एक सटीक विधि से होगी। यदि यह विधि हल को सिद्ध नहीं करती है, तो विद्यार्थी वैकल्पिक परिकल्पना का निर्माण करेगा और पुनः परिकल्पना की जांच करेगा।
- f. **भौतिक प्रतिरूपों की संरचना करना** : कुछ समस्याओं को हल करने में भौतिक प्रतिरूपों की आवश्यकता होती है। जैसे— 8×8 माप के वर्गाकार शतरंज के बोर्ड में, 1×1 माप के वर्गाकार कितने खाने होते हैं? इस समस्या को हल करने के लिए, बच्चों को शतरंज का बोर्ड दिया जा सकता है।
- g. **परिणाम की जांच करना** : और अंत में बच्चों से उनके परिणाम की जांच के लिए कहा जाता है और विद्यार्थी उसका सामान्यीकरण बनाने के योग्य हो जायेंगे और दैनिक जीवन में इसका उपयोग करेंगे।

इस कोर्स की इकाई-3 के पृष्ठ-3 पर समस्या समाधान विधि की व्यापक चर्चा की गयी है।

समस्या-निर्माण विधि—समस्या निर्माण, घनिष्ठ रूप से समस्या समाधान विधि से संबंधित है। किसी दी गयी समस्या की जांच पड़ताल करने के लिए, समस्या निर्माण विधि में नयी समस्याओं का सृजन करना और प्रश्न करना शामिल है और उसके अतिरिक्त समस्या को हल करते समय इससे संबंधित समस्याओं का पुनः निर्माण करना शामिल है। अध्यापक, बच्चों की सोचने की विधि को समझकर, उनकी समस्या बनाने की विधि की आदत के विकास में सहयोग कर सकता है और प्रश्नों का सृजन करके भी इस विधि को विकसित किया जा सकता है। समस्या समाधान कौशल और समस्या हल करने की ओर चित्तवृत्ति को बेहतर करने के लिए, समस्या निर्माण विधि में, समस्या निर्माण को, अनुदेशन हस्तक्षेप के रूप में विकसित किया जाता है। समस्या निर्माण अधिगम का एक सूचक है।

जब हम बच्चों को समस्या निर्माण के लिए उत्साहित करते हैं तब हम उन्हें उस कार्य को करने लिए आमंत्रित करते हैं जो गणितज्ञ करते हैं।

जैसे कि सूक्ष्म अवलोकन करना, प्रतिमानों की खोज करना, अनुमान प्रस्तुत करना, और नये पथ का निर्माण करना।



उनकी जांच की विधि में, गणितज्ञ अधिगम की अभिवृत्तियों को भी विकसित करते हैं जैसे कि लगन, अपने सोच को संशोधित करने का इच्छुक, जोखिम लेने के गुण को सम्मान की दृष्टि से देखना।

आओ, उदाहरण के तौर पर, एक कथन पर विचार करें—

$$4 \times 5 = 20$$

कथनों का सूक्ष्मता से अवलोकन करना समस्या निर्माण विधि का प्रथम चरण है। उपरोक्त तथ्य के लिए निम्नलिखित अवलोकन के चरणों को बनाया गया है—

- यहां दो गुणक है।
- दो गुणकों की दो क्रमिक प्राकृतिक संख्याएं हैं।
- एक गुणक सम है और दूसरा गुणक विषम है।
- एक का गुणन 2 है और दूसरे का गुणन 5 है।
- इनका गुणनफल, वर्ग संख्या (16) से 4 अधिक है, और दूसरी वर्ग संख्या (25) से 5 कम है।
- गुणक गिनती की क्रमिक संख्याएं हैं।
- गुणकों का अंतर 1 है।

$4 \times 5 = 20$ तथ्य का अवलोकन करने के बाद, किस प्रकार की समस्या बनायी जा सकती है? उदाहरण के रूप में कुछ समस्याओं का निर्माण यहां किया गया है—

1. जब हम एक सम संख्या की गुणा विषम संख्या से करते हैं तो क्या हमेशा गुणनफल सम संख्या प्राप्त होती है?
2. हमें क्या प्राप्त होता है? यदि एक विषम संख्या की गुणा विषम संख्या के साथ होती है? एक सम संख्या की गुणा एक सम संख्या के साथ होती है? और क्या प्राप्त होता है? यदि तीन विषम संख्याओं की गुणा होती है या तीन सम संख्याओं की गुणा होती है?
3. क्या होता है यदि हम गुणन 2 और 5 से लगातार गुणा करते हैं? इसमें हम कौन सा स्वरूप देखते हैं?
4. क्या हम ऐसे अन्य गुणकों का उपयोग कर सकते हैं जिनका गुणनफल 20 होता है? क्या यह परिणाम संभव है? दिये गये समान गुणकों का उपयोग करके कितने प्रकार के गुणनफल संभव है?
5. क्या होता है यदि हम ऐसी दो संख्याओं का योग करने की कोशिश करते हैं जिनका योगफल 20 होता है? हम ऐसा कितने तरीकों से कर सकते हैं? हमें इससे क्या निर्देश प्राप्त होता है? जब दो सम व विषम संख्याओं को जोड़ा जाता है, और जोड़ने पर योगफल 20 होता है।



टिप्पणी

6. जब हम एक सम संख्या में विषम संख्या को जोड़ते हैं तो क्या हमें योगफल विषम संख्या प्राप्त होती है? लेकिन जब हम एक विषम संख्या की सम संख्या के साथ गुणा करते हैं, तो हमें एक सम संख्या प्राप्त होती है। ऐसा कब होता है? और क्यों होता है?

अधिगम में समस्या निर्माण के क्या फायदे हैं?

- यह विधि पूछताछ की ऊर्जा का विकास करती है। हम ज्यादा से ज्यादा अवलोकन करते हैं और ज्यादा से ज्यादा परिणाम निकालना चाहते हैं।
- यह विधि बच्चे को अज्ञात क्षेत्र में नेतृत्व प्रदान करती है।
- विशेष रूप से समस्या को निर्माण करते समय यह विधि चिंतनात्मक सोच के लिए आवश्यक है और उसको प्रोन्नत करती है।
- यह विधि बच्चे को चिरस्थायी प्रश्न करने के लिए सहयोग प्रदान करती है, जो कि गणितज्ञों ने बनाये हैं— क्या यह संबंध आकस्मिक घटित होते हैं? या क्या यह पद्धति इन संख्याओं के पीछे छिप जाती है? गणितज्ञों द्वारा कही गयी ये बातें क्या हमेशा सत्य है?
- समस्या निर्माण विधि प्रतिमानों की खोज में भी सहायक होती है।
- जब दोनों प्रतिमानों को घटित किया जाता है तो निश्चित रूप से खुले प्रतिमान रूचिपूर्ण होते हैं, लेकिन खोजपूर्ण प्रतिमान ज्यादा रूचिपूर्ण होते हैं। आओ देखते हैं, हमने अपनी मूल समस्या के बारे में क्या सूचना प्राप्त की है—

$4 \times 5 = 20$ हम देखते हैं कि कि '20' अपने समीप सबसे छोटी वर्ग संख्या '16' से '4' अधिक है, और अपने समीप बड़ी वर्ग संख्या '25' से '5' कम है। हम ऐसा क्यों समझते हैं? कि $4 \times 5 = 4 \times (4 + 1)$ या $(5 - 1) \times 5$ है।

E-7 ज्यामितीय प्रमेय "किसी समतल पर त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा से बड़ा होता है।" से संबंधित कुछ समस्याएं बनाने के साथ-साथ अवलोकन के बिंदुओं को भी बताइए।

4.3 गणित शिक्षण के अधिगम केंद्रित उपागम

आप अपनी गणित की कक्षा में सामान्यतया क्या करते हैं? चूंकि गणित को एक कठिन विषय माना जाता है, फिर भी यह एक महत्वपूर्ण विषय है। आप कक्षा-कक्ष में अपना काफी समय अवधारणाओं, सूत्रों और आलेखों की व्याख्या करने में, कठिन समस्याओं को हल करने में, प्रश्न पूछने और प्रश्नों के उत्तर देने आदि में व्यतीत करते हैं। संक्षेप में, ऐसे बच्चे जो कम सक्रिय रहते उनकी अपेक्षा, आप उन्हें सूचित व निर्देशित करने में, ज्यादा सक्रिय रहते हैं। आपके विद्यार्थी आपके शिक्षण को ध्यान-पूर्वक सुनते हैं और उपयोगी बिंदुओं को अपनी नोटबुक में लिखते हैं। इस प्रकार के अधिगम वातावरण में, जहां अध्यापक व्याख्या करने में ज्यादा व्यस्त है, विद्यार्थी के पास प्रश्न करने के सीमित अवसर होते हैं या विद्यार्थी, कक्षा-कक्ष



में एक भी प्रश्न करने में असहज महसूस कर सकता है। ऐसे में बच्चा कक्षा-कक्ष की चर्चा में मामूली रूप से शामिल हो पाता है। गणित शिक्षण की वह विधि जिसकी हमने पूर्व विभाग में चर्चा की है, अधिकांश रूप से अध्यापक केंद्रित विधि है। और दूसरी ओर अधिगम केंद्रित उपागम इस पर आधारित है कि बच्चा अपने पूर्व अनुभव द्वारा अर्जित ज्ञान से कैसे रचनाशील होगा और जहां पर विशेष रूप से अध्यापक की भूमिका अधिगम में सुविधा प्रदान करने वाले के रूप में होती है। इस विभाग में, हम ऐसी ही तीन विधियों या उपागमों के बारे में चर्चा करेंगे।

4.3.1 पांच अधिगम प्रतिमान

अधिगम के इस प्रतिमान में, बच्चे पांच क्रमिक अवस्थाओं को सीखते हैं, जो निम्न हैं—विनियोजन, अन्वेषण करना, स्पष्टीकरण, विस्तार करना, मूल्यांकन करना।

I. विनियोजन अवस्था—विनियोजन की अवस्था में बच्चे को कक्षा-कक्ष में विभिन्न अधिगम कार्यों में व्यस्त रखा जाता है। यह अधिगम कार्य कोई क्रियाकलाप, आश्चर्यजनक घटना को दिखाना या कोई विशिष्ट उदाहरण आदि हो सकता है। जहां पर बच्चे को अपने पूर्व ज्ञान को, वर्तमान विचारों से संबंधित करने का अवसर प्राप्त होता है। इस चरण में आपका कार्य बच्चों के पूर्व ज्ञान की पहचान करना और अधिगम में उनकी अवधारणात्मक गलतियों को पहचानना है।

अधिगम के पांच प्रतिमानों में से विनियोजन घटक बच्चे का ध्यान अपनी ओर खींचने का इरादा करता है, विषय से संबंधित बच्चों की सोच को जानने की कोशिश करता है, बच्चों के दिमाग में प्रश्न पूछने की जिज्ञासा पैदा करता है, उनकी सोच का उद्दीपन करता है, और उनके पूर्व ज्ञान तक पहुंच बनाता है। उदाहरण—कल्पना कीजिए कि आप कक्षा-VI के बच्चों को भिन्न की अवधारणा सिखाने जा रहे हैं। तो आप नीचे प्रस्तावित क्रियाकलाप के द्वारा बच्चों को व्यस्त कर सकते हैं। इसमें उनके भिन्न को सीखने के पूर्व के अनुभव भी शामिल हैं।

क्रिया-I

सभी बच्चों को कुछ कागज (वृत्ताकार, वर्गाकार आकृति के) के टुकड़े और धागे वितरित कीजिए और उन्हें, इनको दो भागों में बांटने के लिए कहिए। बच्चे कागज या धागे को या तो समान भागों में विभाजित कर सकते हैं या असमान भागों में विभाजित कर सकते हैं।

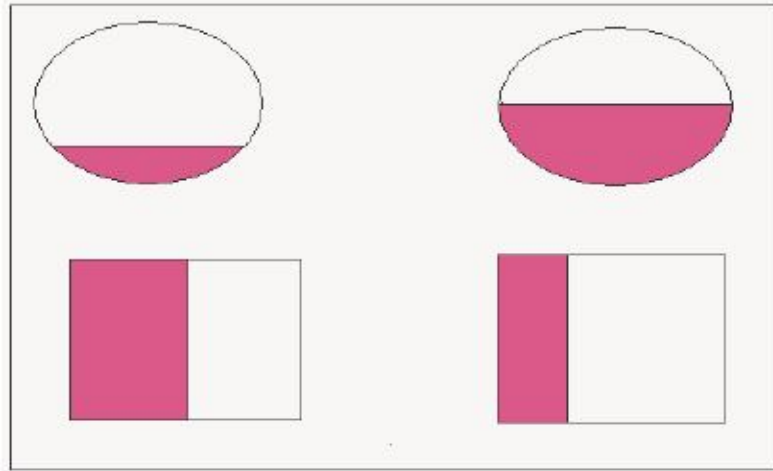
क्रिया-II

एक समान व अलग-अलग रंगों की कागज की शीट वाली, वृत्ताकार एवं आयताकार, ज्यामितीय आकृतियों का एक प्रस्तुतीकरण तैयार कीजिए।

— प्रत्येक आकृति का एक भाग (दो समान व असमान भाग) रंगीन है। (आकृति 3.1)

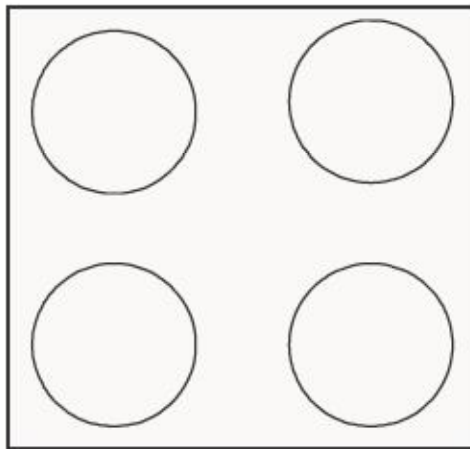


टिप्पणी

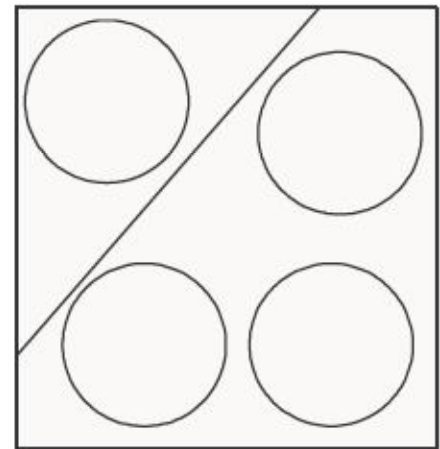


आकृति 4.2 एक आकृति की भिन्न

- एक शीट में वस्तु को समान भागों में विभाजित दिखाया गया है और दूसरी शीट में असमान भागों में विभाजित दिखाया गया है। (आकृति 4.3)



(A)



(B)

आकृति 4.3 एकत्रित आकृतियों की भिन्न

आकृतियों को दिखाते हुए, आप “एक वस्तु के समान भाग या एकत्रित वस्तुओं के समान भाग” की अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए बच्चों से कह सकते हैं। जो उनके पूर्व अनुभवों से जुड़ी हुई है।

विनियोजन के चरण में ऐसा संभाषण, बच्चों को प्रत्यक्ष रूप से अध्यापक से सीखने के बजाय, भिन्न के बारे में उनके ज्ञान को रचनात्मक बनाने के योग्य हो जायेंगे।

II. अन्वेषण करने का चरण—अन्वेषण के चरण में बच्चों के पास किसी घटना एवं सामग्री में प्रत्यक्ष रूप से शामिल होने का अवसर होता है। बच्चे अपने आपको इस प्रकार के



क्रियाकलापों में शामिल करके अपने अनुभवों के आधार को विकसित करते हैं। इस चरण का एक महत्वपूर्ण गुण बच्चों का समूह में कार्य करना है। जैसा कि बच्चे इस चरण में टीम में साथ-साथ कार्य करते हैं, इससे बच्चों के समान अनुभवों का आधार तैयार होता है, जो उनके लिए संप्रेषण एवं सहभागिता में सहायक सिद्ध होता है। आपका कार्य बच्चों का ध्यान लगाने में मार्गदर्शन करना, सामग्री उपलब्ध कराना और साधन उपलब्ध कराने वाले के रूप में होगा। अन्वेषण के दौरान बच्चों के पूछताछ करने की विधि ही अधिगम को आगे बढ़ाती है। विनियोजन की उपरोक्त क्रिया में बच्चे पहले व्यक्तिगत रूप से अन्वेषण करते हैं और बाद में वे समूह में कार्य करते हैं, और निष्कर्ष प्राप्त करते हैं कि भिन्न पूर्ण का एक भाग है। जब पूर्ण को दो समान भागों में विभाजित किया जाता है, तब प्रत्येक भाग पूर्ण का आधा कहलाता है। यह $1/2$ के रूप में लिखा जाता है।

- III. स्पष्टीकरण चरण**—स्पष्टीकरण एक ऐसा बिंदु है, जिस पर बच्चा अपने अमूर्त अनुभवों को रखने की शुरुआत करता है और कक्षा-कक्ष में चर्चा के द्वारा अपनी अवधारणात्मक कमियों को दूर करता है। आप अवधारणा को केवल तभी स्पष्ट करेंगे जब बच्चे समूह में कार्य करने का एक समान अनुभव प्राप्त कर लेते हैं। इस चरण में आपकी भूमिका स्पष्ट करने की है, उसका यह मतलब नहीं है कि आप बच्चों को चर्चा में शामिल नहीं करेंगे। अध्यापक के स्पष्ट करने का स्तर बच्चों की समझ और नासमझ पर निर्भर करता है।
- IV. विस्तार करने का चरण**—अधिगम चक्र का विस्तार करने का चरण बच्चों के ज्ञान को नयी स्थितियों में लागू करने का अवसर प्रदान करता है। जिसमें नये प्रश्नों को उठाना और अन्वेषण के लिए परिकल्पना बनाना शामिल है। बच्चों ने पहले तीन चरणों में जो सीखा है उसको इस अवधारणा पर लागू करते हैं, और अन्य अवधारणों से संबंध बनाते हैं तथा अपनी समझ को अपने चारों ओर के वास्तविक संसार में लागू करते हैं।
- V. मूल्यांकन का चरण**—पांचवा चरण मूल्यांकन एक निदानकारी आचरण प्रक्रिया है जो आपको निष्कर्ष करने की अनुमति प्रदान करती है चाहे बच्चे ने अवधारणा की समझ एवं ज्ञान को ग्रहण किया है या नहीं। आप कक्षा-कक्ष में आकलन करने के लिए विभिन्न तकनीकों जैसे पोर्टफोलियो, दत्तकार्य, अवलोकन, अवधारणा का खाका बनाना और समूह आकलन आदि का उपयोग कर सकते हैं।

E-8 पांचों अधिगम के प्रतिमानों में से किस चरण में विद्यार्थी को उसके ज्ञान को प्रतिबिंबित करने का मौका प्राप्त होता है?

4.3.2 रचनात्मक व्याख्या (प्रतीक) अभिकल्पना प्रतिमान

इस प्रतिमान में अधिगम के सात पद समाविष्ट हैं और अवलोकन से इसे शुरू करते हैं।

1. **अवलोकन**—अवलोकन इस प्रतिमान का एक महत्वपूर्ण पहलू है, जहां किसी समाधान की प्रक्रिया में शामिल होने से पहले बच्चों को समस्याओं से संबंधित स्थितियों एवं पदों का अवलोकन करने के योग्य बनाया जाता है।



टिप्पणी

2. **प्रासंगीकरण**—स्थिति का अवलोकन करने के बाद बच्चे इसकी प्रासंगिकता को जानने की कोशिश करते हैं। जिसमें बच्चे किसी समस्या की अवलोकित स्थिति एवं पदों का, स्वयं के पूर्व ज्ञान, विचार और अनुभवों से संबंध स्थापित करता है।
3. **संज्ञानात्मक प्रशिक्षुता**—अध्यापक के द्वारा, बच्चों को उनके दिमागी कसरत वाले विभिन्न क्रियाकलाप करने के लिए उत्साहित किया जाता है। एक शिक्षक के रूप में, आप उनका मार्गदर्शन करते हैं कि कैसे किसी स्थिति में समस्या की व्याख्या करते हैं। और कैसे समस्या का विश्लेषण करते हैं। आप देखोगे कि आपके विद्यार्थियों के पास अवधारणात्मकता एवं गैर अवधारणात्मकता वाले अनेक विकल्प मौजूद है।
4. **सहयोगीकरण**—किसी क्रियाकलाप में कार्य करने के लिए बच्चे समूह का निर्माण करते हैं। सहयोगीकरण की अवस्था में, बच्चे अपनी वैकल्पिक अवधारणाओं/गैर अवधारणाओं के बारे में स्वतंत्र रूप से चर्चा करते हैं और अपने सहयोगियों के साथ संप्रेषण के योग्य हो जाते हैं। एक शिक्षक के रूप में, आप प्रत्येक समूह का मार्गदर्शन करते हैं और ठीक उसी समय पर आप प्रत्येक समूह के सहापाठी की तरह भी कार्य करते हैं।
5. **अनुवादन और संरचना**—बच्चे अपने रचनात्मक ज्ञान का विश्लेषण, तर्क-वितर्क के द्वारा चर्चा के द्वारा और प्रामाणिकता के द्वारा करते हैं, और अपने अनुवादन का सृजन करते हैं।
6. **विभिन्न अनुवादन**—यदि बच्चा अधिगम प्रक्रिया के दौरान लचीलापन महसूस करता है तो वह विभिन्न प्रकार से ज्ञान की व्याख्या करने के योग्य हो जाता है, और समस्या समाधान की अनेक संभावित व्याख्याओं का निर्माण करता है।
7. **विभिन्न घोषणा पत्र**—बच्चा, समस्या को हल करने के लिए विभिन्न व्याख्याओं को एक-एक करके लागू करने की कोशिश करता है और तब समस्या के अनेक हल प्राप्त करता है। और आगे वह एक जैसी व्याख्या के अनेक घोषणापत्र प्राप्त कर लेता है।

आप, अध्यापक के रूप में अपनी भूमिका को महसूस कर सकते हैं, इस विधि में नवीनता की खोज करने के लिए बच्चे की सहभागिता के साथ-साथ आपके सहयोग की भी आवश्यकता होती है। आपकी मुख्य भूमिका समूह में परस्पर क्रिया के लिए साधन उपलब्ध कराने की है, और यह ध्यान रखने की है कि सहभागियों का ध्यान अपनी समस्या पर है या नहीं। इस विधि में, समस्या की अनेकों व्याख्या करने के लिए और अनेक घोषणा पत्रों तक पहुंचने के लिए, एक अध्यापक के रूप में आपको बहुत ज्यादा कल्पना शक्ति और धैर्य की आवश्यकता है, बच्चों का सामर्थ्य, उनकी उत्सुकता, उनका जोश और कुल मिलाकर उनका एकत्रित पूर्व ज्ञान, उनको शक्ति प्रदान कर गतिक बनाता है।

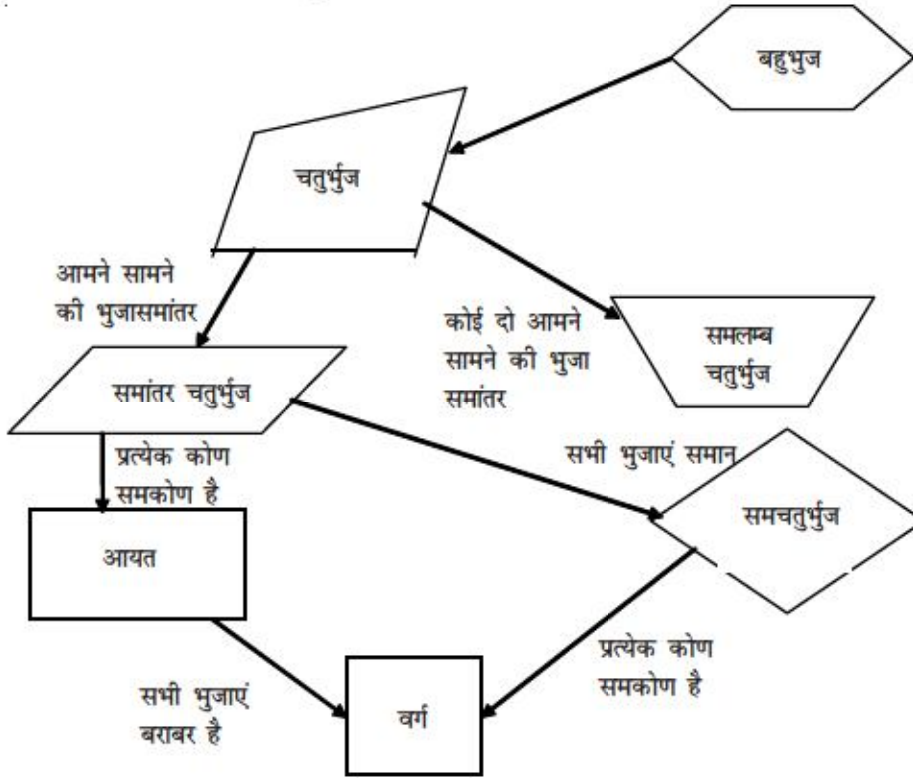
जब इस विधि को गणित शिक्षण में लागू किया जाता है—तो कक्षा कक्ष की अवस्था में अधिगम प्रक्रिया, समस्या का समाधान करने के विभिन्न तरीकों को सफलतापूर्वक बनाने में बच्चे एवं अध्यापक दोनों की सहायता करती है। जबकि सोचा ये जाता था कि समाधान प्राप्त करने की अधिकृत रूप से केवल एक सही विधि है।



4.3.3 अवधारणा का खाका तैयार करना—

विद्यार्थी गणित में विभिन्न अवधारणाएं सीख चुके हैं, लेकिन कई बार आप पाते हैं कि वे अवधारणाओं के साथ ऐसा व्यवहार करते हैं कि जैसे उन्होंने तथ्यों को अलग करना और असंबद्ध करना ही सीखा है, वे इन अवधारणाओं के बीच संबंध बनाने में स्वयं को अयोग्य पाते हैं। आप भी जानते हैं कि कोई भी अवधारणा गणित में पृथक्करण नहीं करती है, गणित की एक विशेष अवधारणा, गणित की विभिन्न शाखाओं से आंतरिक रूप से जुड़ी हुई है। और अन्य विषयों जैसे विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान से भी विभिन्न तरीकों एवं विभिन्न ढंग से जुड़ी हुई है।

उदाहरण के रूप में, एक चतुर्भुज की अवधारणा का खाका नीचे दिया गया है—



चतुर्भुजों की अवधारणा का खाका

किसी अवधारणा का खाका विभिन्न तरीकों से बनाकर उसको विशिष्ट अवधारणा के रूप में बनाया जा सकता है। उपरोक्त अवधारणा को विभिन्न मानचित्रों के रूप में विकसित किया जा सकता है, लेकिन यह उप-अवधारणाओं की संख्या और जिन शब्दों को आप शामिल करना चाहते हैं उन जोड़ने वाले शब्दों की संख्या पर निर्भर करता है। इसलिए जोड़ने वाली रेखाओं की संख्या के द्वारा और बच्चे द्वारा उपयोग किये गये अवधारणा के मानचित्र के द्वारा संबंधों की संख्या और समझ की गहराई का आकलन किया जा सकता है। अतः अवधारणा मानचित्र, विद्यार्थियों द्वारा खोजे गये संबंधों का एक स्थूल अभिलेख प्रदान करता है, और यह सूचित



टिप्पणी

करता है कि बच्चों के ज्ञान को कैसे संगठित और अंतःसंबंधित करते हैं। अवधारणा का मानचित्रण बच्चों की समझ की गहराइयों से महत्वपूर्ण व्यवहारिक ज्ञान को उपलब्ध करा सकता है क्योंकि यह उनके संबंधों की सटीकता और क्षमता को प्रतिबिंबित करता है। कुछ अवधारणाओं में वेन आरेख अवधारणा मानचित्रण की भूमिका निभा सकता है।

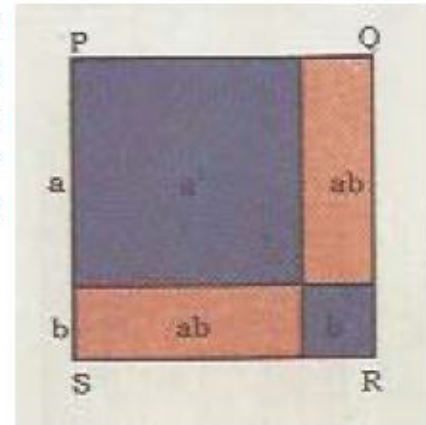
E-9 प्रतीक रूपरेखा के प्रतिमान से किस चरण में, विद्यार्थी अपने पूर्व ज्ञान को इससे जोड़ते हैं।

E-10 तीर के निशान का उपयोग अवधारणा मानचित्रण में क्यों किया जाता है?

4.3.4 क्रियाकलाप आधारित अधिगम

आपने अपने कक्षा-कक्ष में अवलोकन किया होगा कि बच्चे काफी रूचि लेते हैं, जब वे स्वयं या आप कक्षा-कक्ष में किसी क्रियाकलाप का प्रदर्शन करते हैं। इसके पीछे यही कारण है कि एक छोटा बच्चा अधिगम के दौरान अपनी अनेकों ज्ञानेन्द्रियों का उपयोग करना पसंद करता है। क्रियाकलाप आधारित अधिगम इन ज्ञानेन्द्रियों के उपयोग पर केंद्रित होता है और अधिगम को कुछ करके सीखने पर और क्रियाकलापों पर आधारित होना चाहिए। क्रियाकलाप आधारित अधिगम का विचार आम राय में इसलिए सुदृढ़ है क्योंकि बच्चे सूचनाओं को निष्क्रियता से सीखने की अपेक्षा सक्रिय होकर सीखते हैं। यदि बच्चों को कुछ खोज करने के अवसर और समुचित अधिगम वातावरण, प्रदान कराया जाता है, तब अधिगम किया गया विषय वस्तु ज्यादा समय तक मस्तिष्क में रहेगा और रूचि पूर्ण बनेगा। स्व-अधिगम को बढ़ावा देने के लिए, बच्चे की पसंद की शैक्षिक सामग्री का उपयोग और बच्चे की प्रवृत्ति एवं कौशल के अनुसार अध्ययन की अनुमति प्रदान करना, क्रियाकलाप प्रणाली के महत्वपूर्ण अंग है। विद्यालय स्तर पर गणित में क्रियाकलाप, खेल, पहेली, कार्य पत्रिका, कागज मोड़ना/काटना, और गणितीय प्रतिमानों के अवधारणात्मक मानचित्रण के रूप में बनाये जा सकते हैं।

कल्पना कीजिए कि आप बीजगणितीय राशि $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ का शिक्षण करने जा रहे हैं। तो आप इसे ब्लैक बोर्ड पर संख्यात्मक रूप से भी हल कर सकते हैं, लेकिन जब हम बात करते हैं कि इसी बीजगणितीय राशि को क्रियाकलाप का उपयोग करके सीखना है, तब बच्चे थर्मोकॉल शीट, गोंद, थर्मोकॉल, कटर, ग्लेज पेपर और स्केच पेन का उपयोग करके एक प्रतिमान तैयार कर सकते हैं। प्रतिमान को तैयार करने के दौरान आप उनका मार्गदर्शन कर सकते हैं, प्रतिमान का प्रदर्शन एवं इस बीजगणितीय राशि को सिद्ध कर सकते हैं।



आकृति 4.5 $(a+b)^2$ के लिए प्रतिमान



अन्य उदाहरण पर विचार करते हैं। कल्पना कीजिए कि आप कक्षा-VI के बच्चों को त्रिभुज के गुण सिखाने जा रहे हैं। आप तीन तीलियों को लेकर एक क्रियाकलाप का प्रदर्शन कर सकते हैं और इस गुण को सिद्ध कर सकते हैं कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है। कागज मोड़ने और कागज काटने के क्रियाकलाप के द्वारा आप त्रिभुज के अन्य गुणों जैसे—“किसी त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है।” को भी सिद्ध कर सकते हैं। यदि आप अपनी कक्षा-कक्ष में ऐसे क्रियाकलाप आधारित अधिगम का अनुसरण करेंगे, तो आप पायेंगे कि इन क्रियाकलापों से बच्चे जिज्ञासु बनते हैं और अधिगम में रुचि लेते हैं। इस कोर्स की इकाई-4 के पृष्ठ-3 में, आप, शिक्षण-अधिगम की क्रियाकलाप आधारित प्रणाली की पहली ही चर्चा कर चुके हैं जो समान रूप से गणित के लिए उपयोगी है।

अनुभवात्मक अधिगम, अधिगम की एक ऐसी प्रणाली है जिसमें सहभागी एक क्रियाकलाप में व्यस्त रहता है, समीक्षात्मक क्रियाकलाप पर प्रतिबिंबित होता है, और व्यवहारिक ज्ञान एवं अधिगम के उपयोग को प्राप्त करता है। जो अधिगम अनुभवात्मकता से विकसित होता है, वह बच्चे के स्वयं के द्वारा होता है, और व्यवहार परिवर्तन में प्रभावकारी एवं एक एकीकृत पक्ष के रूप में बनता है। कौशलों का विकास अनुभवात्मक अधिगम से ही होता है।



अनुभवात्मक अधिगम चक्र की पांच क्रमिक अवस्थाएं हैं। ये निम्नलिखित हैं—

- **अनुभव करना**—(यह इस चरण की प्राथमिक अवस्था है) प्रायः कोई क्रियाकलाप जिसमें स्वमूल्यांकन या अन्तर-वैयक्तिक (परस्पर) क्रिया शामिल होती है, उसको अनुभवात्मक अधिगम के भाग की तरह उपयोग कर सकते हैं।



टिप्पणी

- **प्रकाशन**—जब बच्चों को क्रियाकलाप का अनुभव हो जाता है तो इसके बाद, अनुभव के दौरान उन्होंने क्या अवलोकन किया? कैसा महसूस किया है? इस जानकारी को आपस में बांटने या प्रकाशन के लिए तैयार हो जाते हैं?
- **प्रक्रिया बनाना**—(यह चरण अनुभवात्मक अधिगम चक्र का केंद्र बिंदु है।) यह चरण इस चक्र का समूह गतिक अवस्था है जिसमें समूह के सदस्यों के द्वारा बांटे गये अनुभवों का व्यवस्थित मूल्यांकन शामिल है।
- **सामान्यीकरण करना**—इस अवस्था में, समूह में प्राप्त किये गये अनुभवों में समानता है या नहीं, इस बारे में समूह के सदस्य जागरूक रहते हैं, और इस बात पर अपना ध्यान केंद्रित करते हैं।
- **लागू करना**—इस अंतिम अवस्था में, जिस वास्तविक स्थिति में बच्चे शामिल हैं, उसमें सामान्यीकरण को लागू करने में, अध्यापक, उनकी सहायता करता है।

कल्पना कीजिए कि आप गणित में ब्याज की दर की अवधारणा का शिक्षण करने जा रहे हैं। वास्तव में ब्याज, समय-समय पर कैसे बढ़ता है, कुछ इस प्रकार के अनुभवों की बच्चों को आवश्यकता है। इसलिए ऐसी अवधारणा को सिखाने के लिए, आप बच्चों से अपने माता, पिता की बैंक की पास-बुक का अवलोकन करने के लिए कह सकते हैं। बच्चे इसे समझते हैं, और अनुभव के द्वारा उन्होंने जो सीखा है, वे उसको विभिन्न स्थितियों में भली प्रकार से लागू करते हैं।

4.4 गणितीय अधिगम को ज्यादा चुनौतीपूर्ण और संतोषजनक बनाना

गणित अधिगम को ज्यादा चुनौतीपूर्ण और संतोषजनक बनाना, गणित अधिगम का एक महत्वपूर्ण उद्देश्य है। इसका तात्पर्य है कि गणित अधिगम बच्चों के बीच में जिज्ञासा का सृजन करता है और बच्चों को उस चुनौतीपूर्ण स्थिति में ले जाता है, जहां पर वे अपने स्तर का संतोषजनक अधिगम प्राप्त कर सकते हैं। और ठीक उसी समय, गणित अधिगम बच्चों को आनंद की अनुभूति प्रदान करता है, और बच्चों की थकान एवं बोरियत को दूर करता है। आपने यह अनुभव किया होगा कि गणित सीखना शुरू करने से पहले ही बच्चों के मन में भय विकसित हो जाता है जिसके कारण बच्चे गणित में असफल हो जाते हैं। इसलिए गणित को ज्यादा चुनौती पूर्ण और संतोषजनक बनाना ही आपका कर्तव्य है, ताकि बच्चे अपनी सृजनात्मक योग्यता का विकास करें एवं गणित अधिगम में अपनी सकारात्मक प्रवृत्ति का प्रदर्शन करें। आओ चर्चा करते हैं, कि गणित अधिगम, बच्चों की सृजनात्मक योग्यता का विकास करने में, गणितीय प्रयोगशाला एवं पुस्तकालय का उपयोग करने में, कैसे सहयोग प्रदान करता है।

4.4.1 बच्चों की सृजनात्मक योग्यताओं को विकसित करना

आपने, अपने कक्षा-कक्ष में यह अनुभव किया होगा कि कुछ बच्चों का प्रदर्शन अन्य बच्चों से अलग है। उनका गणित की समस्या को हल करने का तरीका और गणित में किसी क्रियाकलाप को विकसित करने का तरीका एकदम अलग और नया है। बच्चे की इसी प्रकार



की योग्यता को, सृजनशील योग्यता कहते हैं। इस प्रकार की योग्यता को बच्चों में कैसे विकसित किया जाये, गणित शिक्षण में यह एक महत्वपूर्ण कार्य है। बच्चों में सृजनात्मक योग्यता का विकास कम या ज्यादा होना, उनकी अधिगम क्रिया की प्रकृति पर एवं कक्षा-कक्ष में शिक्षक द्वारा अपनायी गयी अधिगम प्रणाली पर, निर्भर करता है। आओ अधिगम क्रिया की प्रकृति की पहचान करें जो बच्चों की सृजनात्मकता को प्रभावित करती है।

- क्रियाकलाप आधारित-क्रियाकलाप की रूपरेखा इस प्रकार से बनानी चाहिए कि बच्चे इसकी ओर आकर्षित हो और स्वेच्छा से इसमें भाग लें।
- चुनौतीपूर्ण-क्रियाकलाप ना तो आसान होना चाहिए और ना ही ज्यादा कठिन, लेकिन बच्चों के लिए दिमागी रूप से चुनौती पूर्ण होना चाहिए, जिससे कि वह अपनी पूरी सामर्थ्य का प्रयोग करते हुए इसे संपन्न करें, और इस क्रियाकलाप का समाधान दिमागी रूप से संतोषजनक हो।
- भिन्न समाधान-गणित में ऐसी अनेकों समस्याएं हैं जिनका केवल एक ही हल सही है, लेकिन ऐसे क्रियाकलाप जिनके विभिन्न संभावित समाधान होते हैं, सृजनात्मकता की आवश्यकता को उत्साहित करते हैं। यह बच्चे को नयी खोज के लिए उत्साहित करते है।
- तर्कपूर्ण एवं समस्या आधारित-अन्य क्षेत्रों की असंभावित समस्याओं से, गणितीय समस्याओं की अलग तर्क पूर्ण संरचना होती है और सभी गणितीय क्रियाकलाप समस्या आधारित होते है। एक बार बच्चा तर्क पूर्ण संरचना से भलीभांति परिचित हो जाता है, तब वह तर्क को आंकने की कोशिश करता है, और प्रक्रिया में, विभिन्न नयी प्रणालियों का प्रयोग करने की कोशिश करके, तर्क पूर्ण संरचना के साथ, स्थिरता से समस्या को हल करता है। क्रियाकलाप का समस्या आधारित होना, समाधान में नयी प्रणालियों को शामिल करके, बच्चे के लिए स्थितियों को चुनौतीपूर्ण बनाता है।
- आलेखीय निरूपण-गणितीय आंकड़ों और संबंधों का विभिन्न आलेखों एवं चित्रों के रूप से निरूपण सृजनात्मक प्रतिभा को उत्साहित करता है।

बच्चों के बीच सृजनात्मकता को विकसित करने के लिए समान रूप से निम्नलिखित अधिगम प्रणालियों की पहचान होनी चाहिए।

- बच्चों द्वारा तय किये गये हल के लिए वैकल्पिक विचारों या विधियों की पहचान करना।
- बच्चे एवं अध्यापक दोनों को मिलकर वैकल्पिक समाधान को खोजना।
- दिमागी कसरत एवं चिंतनात्मक सोच के लिए ज्यादा क्षेत्र प्रदान करना।
- विस्तृत सोच के लिए उत्साहित करना।
- समस्या समाधान एवं समस्या निर्माण के लिए ज्यादा क्षेत्र प्रदान करना।
- बच्चों को प्रश्न करने एवं अपने विचारों को अभिव्यक्त करने की स्वतंत्रता प्रदान करना।
- उत्साहवर्धन करना एवं विचारों तथा सुझावों को स्वीकार करना।
- सक्रिय अधिगम और प्रक्रिया आधारित आकलन।



टिप्पणी

4.4.2 गणितीय प्रयोगशाला एवं पुस्तकालय का उपयोग

कल्पना कीजिए आपकी कक्षा-कक्ष में, जब आप कक्षा-VII के बच्चों को वृत्त का क्षेत्रफल सिखाते हैं, तब आप उन्हें वृत्त के क्षेत्रफल का एक सूत्र बता देते हैं और कई समस्याओं को श्यामपट्ट पर हल कर देते हैं। शिक्षण का यह तरीका उत्पादों पर उत्पाद आधारित तरीका है, और यह तरीका केवल बच्चों के बीच संगणना कौशल पर केंद्रित है। बच्चे ये नहीं जान सकते कि वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र कैसे आया। गणित अधिगम की प्रक्रिया ज्ञान की संरचना के लिए जीवनदायी है एवं गणितीय प्रयोगशाला और पुस्तकालय प्रक्रिया आधारित अधिगम में साधन उपलब्ध कराने का काम करती है। गणित अधिगम सृजनात्मक और अन्वेषणात्मक दोनों प्रकार की प्रक्रिया है। और विद्यालय स्तर पर बच्चे द्वारा संसाधनों का उपयोग करना ज्यादा महत्वपूर्ण है। गणित के प्रत्येक विद्यार्थी को गणितीय प्रक्रिया को सीखने की आवश्यकता है। प्रक्रिया को सीखने का सबसे अच्छा तरीका इसका अभ्यास करना होता है। यद्यपि कक्षा-कक्ष में बच्चों के गणित में सृजनात्मक एवं खोज की पूरी प्रक्रिया में अनुभव करने का कम समय दिया जाता है और केवल उनको शुद्ध रूप से प्रक्रिया के परिणाम के बारे में सिखाया जाता है। इसलिए गणित सीखने को सबसे अच्छा तरीका गणित की प्रयोगशाला का उपयोग करना है, इसका उपयोग बच्चे और अध्यापक के बीच सहगामी के रूप में हो सकता है, और गणित के अनुशासन के रूप में, सुन्दरता, महत्ता और उपयोगिता की खोज और समझ का अवसर प्रदान करता है। इससे, बच्चों को विद्यालय में सिखाये गये विषय से संबंधित समझ को बढ़ाने की और गणित अधिगम में आनंद प्रदान करने की अपेक्षा की जा सकती है।

गणित की प्रयोगशाला एक ऐसा स्थान है, जहां गणितीय क्रियाकलाप कार्यान्वित होते हैं, और बच्चे नयी खोजों को परम्परागत अनुभवों से प्राप्त करते हैं। आगे गणित की प्रयोगशाला गणित में गणित के प्रति जागरूकता को, कौशलों के निर्माण को, सकारात्मक दृष्टिकोण और करके-सीखने को प्रोत्साहित करती है।

आपके विद्यालय में, आपने देखा होगा कि ज्यादातर बच्चे अपनी पाठ्य पुस्तक से परिचित होते हैं और वे ये सोचते हैं कि गणित सीखने के लिए पाठ्यपुस्तक अंतिम संसाधन है। अब, पाठ्य-पुस्तक के अतिरिक्त, गणित में पत्र-पत्रिका, मैगजीन, संदर्भ पुस्तकें और सी.डी. आदि नियमित रूप से उपलब्ध हैं। और उनमें, नये खोजपूर्ण विचार, प्रयोग सूत्रों का समीक्षात्मक उपयोग और विभिन्न गणितज्ञों की जीवनी शामिल हैं। बच्चों को, गणित के संसार में विभिन्न विचारों को प्राप्त करने के लिए इन सामग्रियों से सीखने की आवश्यकता है। इसलिए प्रक्रिया आधारित अधिगम में गणित पुस्तकालय का उपयोग एक महत्वपूर्ण पहलू है। एक अध्यापक होने के नाते आप भी पुस्तकालय का उपयोग करें और अपने विद्यार्थियों को भी गणित पुस्तकालय से सीखने के लिए प्रेरित करें।

गणित पुस्तकालय, संसाधनों को एकत्र करने का, गणितिय अवधारणा के प्रचार करने का, विषय वस्तु, कहानी, संदर्भित पुस्तकें, पहेलियां और गणितीय खेल आदि का एक महत्वपूर्ण स्थान है।



4.5 सारांश

- कक्षा-कक्ष में, पाठ्य वस्तु का प्रभावशाली अधिगम करने के तरीके को विधि कहते हैं।
- आगमन विधि, स्थूल उदाहरणों से सामान्यीकरण के सिद्धांत पर आधारित है, जिसमें बच्चों को, उनको अवलोकन से, तथ्य, नियम, सिद्धांत एवं सूत्र आदि स्थापित करने के लिए उत्साहित किया जाता है।
- निगमन विधि, विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिए, तथ्यों, निष्कर्षों के नियम, सिद्धांतों और सूत्रों आदि के प्रयोगों के सिद्धांत पर आधारित है।
- समस्या समाधान एवं समस्या निर्माण दोनों विधियों का आपस में गहरा संबंध है। समस्या समाधान विधि, समाधान तक पहुंचाती है जबकि दी गयी स्थिति में खोज करने के लिए, समस्या निर्माण विधि में, नयी समस्याओं एवं प्रश्नों का सृजन शामिल होता है, इसके अतिरिक्त, समस्या को हल करते समय, इससे संबंधित नयी समस्याओं को पुनः बनाना शामिल है।
- परियोजना एक विद्यार्थी केंद्रित विधि है, जिसमें विद्यार्थी को कक्षा-कक्ष के बाहर, स्वयं के द्वारा कुछ करने के लिए चुनौती होती है।
- अधिगम केंद्रित प्रणाली इस बिंदु पर आधारित होती है कि बच्चे अपने पूर्व अनुभवों के आधार पर, अपने स्वयं के ज्ञान की संरचना कैसे करते हैं।
- अधिगम के पांच प्रतिमानों में, विद्यार्थी पांच भिन्न चरण सीखते हैं—विनियोजन, अन्वेषण, स्पष्टीकरण, विस्तार करना, मूल्यांकन।
- एक मानचित्रण की अवधारणा, विद्यार्थी द्वारा खोजे गये संबंधों के मूर्त अभिलेख प्रदान करती है और यह सूचित करती है कि विद्यार्थी का ज्ञान आपस में कैसे संबंधित है? और कैसे संगठित है?
- क्रियाकलाप आधारित अधिगम, ज्ञानेंद्रियों के उपयोग पर आधारित है और अधिगम कुछ परंपरागत प्रयोगों और क्रियाकलापों के करने पर आधारित है।
- अनुभवात्मक अधिगम, अधिगम की एक ऐसी प्रणाली है, जिसमें सहभागी एक क्रियाकलाप में व्यस्त रहता है, समीक्षात्मक क्रियाकलाप पर प्रतिबिंबित होता है, और व्यवहारिक ज्ञान एवं अधिगम के उपयोग को प्राप्त करता है।
- गणित की प्रयोगशाला एक ऐसा स्थान है, जहां गणितीय क्रियाकलाप कार्यान्वित होते हैं, और बच्चे नयी खोजों को परंपरागत अनुभवों से प्राप्त करते हैं।
- गणित पुस्तकालय, संसाधनों को एकत्र करने का, गणितीय अवधारणा के प्रचार करने का, विषय वस्तु, कहानी, संदर्भित पुस्तकें, पहलियां और गणितीय खेल आदि का एक महत्वपूर्ण स्थान है।



टिप्पणी

4.6 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर

- E-1 दो आसान कोणों का योग 180° है।
- E-2 आगमन के लिए विभिन्न प्रकार की वास्तविक संख्याओं का उदाहरण दीजिए। निष्कर्ष होगा—“दो वास्तविक संख्याओं का योग एक वास्तविक संख्या होता है।”
- E-3 आगमन विधि
- E-4 निगमन विधि
- E-5 परियोजना में महत्वपूर्ण अनुभव, क्रियाकलाप, एवं समूहीकरण शामिल होना चाहिए।
- E-6 विश्लेषणात्मक विधि
- E-9 संख्या व चिह्नों का रूपांतरण तथा सरलीकरण
- E-8 विस्तार करने का चरण
- E-9 संदर्भिकरण
- E-10 अवधारणाओं में संबंध बनाना

4.7 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

Bransford, J.D., Brown, A.L. & Cocking, R.R. (2000). How people Learn. Washington D.C.; National Academy Press.

Wood, T., Cobb, P. & Yacket, E. (1995). Reflections on Learning and teaching mathematics in elementary school. In L.P. Steffe & J. Gale (Eds), Construction in education Hillsdale :

Lawrence Erlbaum Associates.

4.8 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1. प्रारम्भिक स्तर पर ज्यामितीय की तीन अवधारणाओं को चुनिए और व्याख्या कीजिए कि आप आगमन विधि का उपयोग करते हुए कैसे इन्हें सिखायेंगे?
2. प्रारम्भिक कक्षा के गणित में से कोई विषय वस्तु चुनिए और आगमन एवं निगमन दोनों विधियों का उपयोग करते हुए शिक्षण की योजना बनाइए।
3. त्रिभुज के गुणों के विभिन्न क्रियाकलापों की पहचान कीजिए जिससे आप अपने बच्चों को क्रियाकलाप आधारित अधिगम में व्यस्त कर सकें।
4. कक्षा-VII के गणित में से कोई एक विषय वस्तु लेकर, पांच अधिगम प्रतिमानों का उपयोग करते हुए एक पाठ योजना तैयार कीजिए।