



टिप्पणियाँ



318hi09

9

## अपकिरण के माप

पूर्ववर्तीय अध्याय केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, का समकों के संक्षिप्त अथवा व्यक्तिगत प्रतिनिधि मूल्य के रूप में विवरण प्रदान करता है। समकों का विवरण प्रस्तुत करने में हम शायद तब तक पर्याप्त नहीं होंगे, जब तक हम व्यक्तिगत मूल्यों के बिखराव अथवा विस्तार, जो उनके आसपास हैं—के तरीकों को न समझ लें। अन्य शब्दों में किसी समंक श्रेणी के विचलन अथवा बिखराव के विवरण को अपकिरण के रूप में जाना जाता है। इसके माप से हम यह जान पाते हैं कि औसत कितना प्रतिनिधि है?

आइए, हम निम्न तीन समुच्च लेते हैं—

विद्यार्थी	समूह 'एक्स'	समूह 'वाई'	समूह 'जेड'
1	50	45	05
2	50	50	45
3	50	55	100
mean $\bar{X}$	50	50	50

उपरोक्त में इस प्रकार तीनों समूहों का माध्य समान अर्थात् 50 ही है। समूह 'एक्स' तथा समूह 'वाई' का माध्य भी समान है। अब कोई भी यह कह सकता है कि तीनों समूहों के विद्यार्थियों की क्षमता समान है, यह निष्कर्ष निकालना पूर्णतः गलत है। गहन परीक्षण से ज्ञात होता है कि समूह 'एक्स' के विद्यार्थियों के समान अंक है, जैसा माध्य बताता भी है। समूह 'वाई' के विद्यार्थियों के अंक माध्य के लगभग निकट हैं, जबकि तीसरे समूह 'जेड' के विद्यार्थियों के अंकों में व्यापक बिखराव है। अतः इस प्रकार यह स्पष्ट हो जाता है कि समकों के विश्लेषण के लिए मात्र केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप समकों के वर्णन करने में अपने आप में पर्याप्त नहीं है। अतः अपकिरण की माप समकों की विचलनशीलता की कोटि को जानने में हमारी मदद करती है और समकों को समझने के लिए बेहतर समझ प्रदान करती है।



उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के बाद आप:

- अपकिरण के मापों का अर्थ और उनकी आवश्यकता जान पाएंगे;

- अपकिरण के निरपेक्ष तथा सापेक्ष मापों में अंतर समझ पाएंगे;
- अपकिरण के विभिन्न मापों को समझ पाएंगे; तथा
- अपकिरण के विभिन्न मापों की संगणना व तुलना कर पाएंगे।

## 9.1 अपकिरण का अर्थ

अपकरण वितरण के औसत से मूल्यों के भिन्न होने की मात्रा है।

अपकिरण की माप करने के लिए विचलन की मात्रा (निरपेक्ष रूप में) और विचलन की श्रेणी (सापेक्ष रूप में) को जानना आवश्यक होता है। निरपेक्ष रूप में हमें विस्तार (Range), चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation), मानक विचलन (Standard Deviation) आदि पर विचार करना होता है। सापेक्ष रूप के लिए हमें विस्तार गुणांक (Co-efficient of Range), चतुर्थक विचलन गुणांक (Co-efficient of Quartile Deviation), विचलन गुणांक (Co-efficient of Variation) आदि को समझना होता है।

### 9.1.1 अपकिरण की निरपेक्ष और सापेक्ष माप

किसी श्रेणी के अपकिरण को या तो निरपेक्ष रूप या सापेक्ष रूप से मापा जा सकता है। जब अपकिरण को शृंखला की मौलिक इकाई में व्यक्त किया जाता है, उसे अपकिरण की निरपेक्ष माप कहा जाता है। अपकिरण वे निरपेक्ष माप दो या दो से अधिक शृंखलाओं की विशेषताओं की तुलना करने में उपयुक्त नहीं है।

उदाहरण के लिए, यदि समकों को किलोग्राम में अभिव्यक्त किया जाता है तो उसका निरपेक्ष विचलन भी किलोग्राम में ही व्यक्त किया जाएगा। यदि उसे ग्राम में व्यक्त किया जाए तो विचलन हजार गुणा अधिक हो जाएगा। अतः तुलनात्मक विश्लेषण के लिए यह आवश्यक है कि अपकिरण की माप सापेक्ष रूप में की जाए। जो प्रतिशत के रूप में (इकाईहीन संख्या) व्यक्त किया जाता है। इसे अपकिरण गुणांक (Co-efficient of Dispersion) कहा जाता है। प्रत्येक निरपेक्ष माप की सापेक्ष माप होती है।

## 9.2 अपकिरण की गणना की और विधियां

अपकिरण के निम्नलिखित महत्वपूर्ण माप हैं—

1. विस्तार
2. चतुर्थक विचलन, अंतर चतुर्थक विचलन
3. माध्य विचलन
4. मानक विचलन
5. लॉरेंज वक्र।





टिप्पणियाँ

विस्तार तथा चतुर्थक विचलन, अपकिरण के मूल्यों के फैलाव को गणना द्वारा मापते हैं, जबकि माध्य विचलन, मानक विचलन मर्दों के मूल्यों की औसत से भिन्नता, गणना द्वारा प्रकट करते हैं।

### 9.2.1 विस्तार

किसी भी श्रेणी में सबसे बड़े (L) और सबसे छोटे (S) मूल्य के अंतर को विस्तार (R) कहते हैं। अतः

$$\text{विस्तार (R)} = L - S$$

**9.2.1.2 विस्तार गुणांक ( Co-efficient of Range ):** यह विस्तार की सापेक्ष माप है। अपकिरण के तुलनात्मक अध्ययन के लिए इसका प्रयोग होता है—

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{L - S}{L + S}$$

अविच्छिन्न श्रेणी में विस्तार उच्चतम वर्ग की ऊपरी सीमा और निम्नतम वर्ग की निचली सीमा का अंतर होता है।

### विस्तार मूल्यांकन

विस्तार गणना में अतिसरल और बोधगम्य है। हालांकि, यह वितरण की सभी मर्दों पर आधारित नहीं होता, जबकि चरम मूल्यों से अनावश्यक रूप से प्रभावित होता है। समकों का कोई भी परिवर्तन अधिकतम या न्यूनतम मूल्यों के सापेक्ष परिवर्तन का विस्तार पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। विस्तार को खुले-मुख वाली आवृत्ति वितरण में ज्ञात नहीं किया जा सकता।

**उदाहरण 1 :** विद्यालय की कैटीन में 10 छात्रों के समूह का व्यय (रुपये में) इस प्रकार है—

110, 117, 129, 197, 190, 100, 100, 178, 255, 790.

विस्तार और विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए

**हल:**

$$R = L - S = 790 - 100 = ₹ 690$$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{L - S}{L + S} = \frac{790 - 100}{790 + 100} = \frac{690}{890} = 0.78$$

**उदाहरण 2 :** निम्न आंकड़ों से विस्तार और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए—

आकार	10-20	20-30	30-40	40-50	50-100
आवृत्ति	2	3	5	4	2

**हल:**  $R = L - S = 100 - 10 = ₹. 90$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{100-10}{100+10} = \frac{90}{110} = 0.82$$



### पाठगत प्रश्न 9.1

- उच्चतम और न्यूनतम समंक मूल्य का अंतर है—  
 (अ) विचलन (ब) अंतर चतुर्थक विस्तार  
 (स) विस्तार (द) विचलन गुणांक
- एक अनवेषक ने निम्नांकित निदेशक समंक एकत्र किए हैं, जिनका निदेशक माध्य 5 है—  
 3, 5, 12, 3, 2  
 विस्तार है—  
 (क) 1 (ख) 2 (ग) 10 (घ) 12



टिप्पणियाँ

### 9.2.2 चतुर्थक विचलन

यह निम्न चतुर्थक  $Q_1$  और ऊपरी चतुर्थक  $Q_3$  पर आधारित होता है।  $Q_3 - Q_1$  के अंतर को चतुर्थक विस्तार कहा जाता है। तृतीय चतुर्थक एवं प्रथम चतुर्थक के अंतर  $Q_3 - Q_1$  को 2 से भाग देने पर प्राप्तांक को अर्द्ध-अंतर चतुर्थक विस्तार का नाम दिया जाता है।

$$\text{अतः चतुर्थक विचलन (Q.D)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

#### 9.2.2.1 चतुर्थक विचलन का गुणांक

चतुर्थक विचलन पर आधारित अपकिरण के सापेक्ष माप को चतुर्थक विचलन गुणांक कहा जाता है। इसे परिभाषित किया जा सकता है—

$$\text{चतुर्थक विचलन का गुणांक} = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 + Q_1}{2}} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

यह मापन की किसी भी इकाई से अंक मुक्त होता है। इसका प्रयोग दो या दो से अधिक समंक समुच्चयों की अपकिरण की तुलना में किया जाता है।

#### 9.2.2.2 अवर्गीत आंकड़ों का चतुर्थक विचलन ज्ञात करना

**उदाहरण 3 :** नीचे 7 मजदूरों की दैनिक मजदूरी दी गई है। मजदूरी का (रुपये में) चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए—

120, 70, 150, 100, 190, 170, 250

यहां  $N = 7$  है।

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

**हल:** समकों को आरोही क्रम में संयोजित करने पर हम पाते हैं—

70, 100, 120, 150, 170, 190, 250

$$Q_1 = \frac{(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \frac{(7+1)}{4} \text{ वें मद का आकार} = 2 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 100 \text{ रुपये}$$

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \frac{3(7+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 6 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 110 \text{ रुपये}$$

$$\text{चतुर्थक विचलन (QD)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{1753.75 - 1260}{2}$$

$$= \frac{492.75}{2} = 246.875$$

चतुर्थक विचलन का गुणांक

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{1753.75 - 1260}{1753.75 + 1260} = \mathbf{0.164}$$

आवृत्ति वितरण से चतुर्थक विचलन ज्ञात करना

**उदाहरण 4 :** 20 एकड़ भूमि का गेहूं का उत्पादन (किलोग्राम में) दिया गया है—

1120, 1240, 1320, 1040, 1080, 1200, 1440, 1360, 1680, 1730, 1785, 1342, 1960, 1880, 1755, 1720, 1600, 1470, 1750, तथा 1885.

चतुर्थक विचलन और चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात करो।

**हल:**

समकों को आरोही क्रम (चढ़ते क्रम) में रखने पर शृंखला बनती है—

1040, 1080, 1120, 1200, 1240, 1320, 1342, 1360, 1440, 1470, 1600, 1680, 1720, 1730, 1750, 1755, 1785, 1880, 1885, 1960.



टिप्पणियाँ

$$Q_1 = \left( \frac{N+1}{4} \right) \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \left( \frac{20+1}{4} \right) \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 5.25 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 5 \text{ वीं मद} + 0.25(6 \text{ वीं मद} - 5 \text{ वीं मद})$$

$$= 1240 + 0.25(1320 - 1240)$$

$$Q_1 = 1240 + 20 = 1260$$

$$Q_1 = 1240 + 20 = 1260 \text{ किलोग्राम}$$

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \frac{3(20+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 15.75 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 15 \text{ वें मद का आकार} + 0.75 (16 \text{ वीं मद} - 15 \text{ वीं मद})$$

$$= 1750 + 0.75 (1755 - 1750)$$

$$= 1750 + 3.75 = 1753.75 \text{ किलोग्राम}$$

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{1753.75 - 1260}{1753.75 + 1260} = 0.164$$

### 9.2.2.3 खंडित श्रेणी में चतुर्थक विचलन

**उदाहरण 5 :** एक विशेष बाजार में आयकर विभाग ने विभिन्न फर्मों से निम्न प्रकार कर एकत्र किया—

कर राशि (हजार रु. में)	10	11	12	13	14
फर्मों की संख्या	3	12	18	12	3

चतुर्थक विचलन तथा चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना कीजिए।

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

हल:

तालिका 9.1: चतुर्थक विचलन की गणना

कर राशि (हजार रु. में)	फर्मों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता C.F.
10	3	3
11	12	15
12	18	33
13	12	45
14	3	48
N = 7	<b>Σf = 48</b>	

यहाँ N = 48

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार} \\&= \frac{(48+1)}{4} \text{ वें मद का आकार} \\&= 12.25 \text{ वें मद का आकार} \\&= 11 \text{ (हजार रु.)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_3 &= \frac{3(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार} \\&= \frac{3(48+1)}{4} \text{ वें मद का आकार} \\&= 36.75 \text{ वें मद का आकार} \\&= 13 \text{ (हजार रु.)}\end{aligned}$$

$$\text{चतुर्थक विचलन (Q.D.)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{13 - 11}{2} = 1 \text{ (हजार रु.)}$$

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{13 - 11}{13 + 11} = 0.083 \text{ (हजार रु.)}$$



**पाठगत प्रश्न 9.2**

1. किसी श्रृंखला का प्रथम चतुर्थक 104 है और चतुर्थक विचलन 18 है। इसका तृतीय चतुर्थक ज्ञात कीजिए।

**9.2.2.4 अखंडित श्रेणी में चतुर्थक विचलन की गणना**

**उदाहरण 6 :** निम्न वितरण से चतुर्थक विचलन और चतुर्थक विचलन का गुणांक की गणना कीजिए—

साप्ताहिक वेतन (हजार रु. में)	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19
श्रमिकों की संख्या	14	24	38	20	04

हल:

**तालिका 9.2:** चतुर्थक विचलन व चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना

सप्ताहिक मजदूरी (हजार रु. में)	श्रमिकों की संख्या वारम्वारता (f)	संचयी वारम्वारता (C.F.)
4.5-7.5	14	14
7.5-10.5	24	38
10.5-13.5	38	76
13.5-16.5	20	96
16.5-19.5	4	100
	$\Sigma f = 100$	

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \left( \frac{N}{4} - cf \right)$$

$\frac{N}{4} = 25$   $Q_1$  7.5 – 10.5 वर्ग श्रेणी में निहित है।

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \left( \frac{N}{4} - cf \right) = 7.5 + \frac{25 - 14}{24} \times 3 = 8.875 \text{ (हजार रु.)}$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \left( \frac{3N}{4} - cf \right) = 10.5 + \frac{75 - 38}{38} \times 3 = 13.42 \text{ (हजार रु.)}$$

$$Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{13.42 - 8.875}{2} = 2.273 \text{ (हजार रु.)}$$

$$\text{Coeff. of Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{13.42 - 8.875}{13.42 + 8.875} = 0.21$$



टिप्पणियाँ





टिप्पणियाँ

**चतुर्थक विचलन : एक मूल्यांकन**

जैसा कि चतुर्थक विचलन,  $Q_1$  और  $Q_3$  पर आधारित है, इससे अभिप्रायः यह है कि यह माप श्रृंखला के 50 प्रतिशत मध्य समकों पर आधारित है। इस प्रकार, विस्तार की तरह, चतुर्थक विचलन चरम पदों से प्रभावित नहीं होता, क्योंकि यह आरंभ के 25 प्रतिशत समकों और अंतिम 25 प्रतिशत समकों (समंक चढ़ते क्रम में लगाए गए हों) को अनदेखा करता है।



**पाठगत प्रश्न 9.3**

1. निम्न में से कौन-सा अपकिरण की माप है।
  - (क) प्रतिशतता
  - (ख) चतुर्थक
  - (ग) अंतर चतुर्थक विस्तार
  - (घ) उपरोक्त सभी अपकिरण की माप है।
2. अंतर चतुर्थक विस्तार है—
  - (क) पचासवां प्रतिशतता
  - (ख) मानक विचलन का द्वितीय नाम
  - (ग) अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों के मध्य का अंतर
  - (घ) प्रथम चतुर्थक और तृतीय चतुर्थक के बीच का अंतर
3. निम्न में से विस्तार की कौन-सी सीमा अंतर चतुर्थक विस्तार द्वारा दूर की जा सकती है—
  - (क) विस्तार विचलन जब शून्य होता है।
  - (ख) जब विस्तार की गणना करना कठिन होता है।
  - (ग) चरम मूल्यों से विस्तार का अधिक प्रभावित होना।
  - (घ) विस्तार जब ऋणात्मक हो।
4. एक अन्वेषक ने निम्न निदर्श समकों का संकलन किया है, उन निदर्शकों का माध्य 5 है—
 

3, 5, 12, 3, 2

इनका अंतर चतुर्थक विस्तार है—

(क) 1      (ख) 2      (ग) 10      (घ) 12



टिप्पणियाँ

### 9.2.3 माध्य विचलन

शृंखला के किसी केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (अंकगणितीय माध्य, माध्यिका या बहुलक) से निकाले गए विभिन्न मूल्यों के विचलनों के अंकगणितीय माध्य को उसका माध्य विचलन कहा जाता है। माध्य विचलन वितरण के सभी पदों पर आधारित होता है। इसे औसत के रूप में ज्ञात किया जाता है। अंकगणितीय माध्य, माध्यिका अथवा बहुलक सामान्यतः माध्य के द्वारा ज्ञात विचलनों के आधार पर मूल्यों के विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिह्न + तथा - को छोड़ दिया जाता है, अर्थात् ऋणात्मक विचलन भी धनात्मक मान लिए जाते हैं। संकेत देते हैं कि निरपेक्ष मूल्यों को ही लिया गया है, इसे आदर्श मूल्य भी कहा जाता है।

विचलन के योग को मदों की संख्या से भाग करके माध्य विचलन ज्ञात कर लेते हैं। प्रायः माध्यिका द्वारा ही विचलन निकाले जाते हैं—बहुलक का प्रयोग प्रायः नहीं किया जाता।

#### 9.2.3.1 माध्य विचलन की गणना

- आंकड़ों को आरोही क्रम में संजोड़ें (माध्यिका की गणना हेतु)
- माध्य/ माध्यिका की गणना कीजिए।
- माध्य/ माध्यिका/ बहुलक से विचलन ज्ञात कीजिए। + तथा - के चिह्न पर ध्यान न देकर कॉलम/ D में विचलन दर्शाइए।
- प्रत्येक विचलन को उसके सामने वाली आवृत्ति से गुणा करके उसका योग ज्ञात कीजिए।
- इन गुणनफलों के योग को मदों की संख्या या आवृत्तियों (N) से भाग देकर माध्य विचलन प्राप्त कीजिए। यथा—

$$M.D. = \frac{\sum f |D|}{N}$$

- माध्य विचलन के गुणांक के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$\text{माध्य विचलन का गुणांक} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माध्यिका / माध्य / बहुलक}}$$

**उदाहरण 1 :** एक गृहस्थ की मासिक आय (रुपये में) दी गई है। उसका माध्य-विचलन और विचलन गुणांक निकालिए—

आय (रुपयों में) 8520, 6350, 7920, 8360, 7500

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

तालिका 9.3: माधिका द्वारा माध्य विचलन की गणना

मासिक आय (रुपयों में)	माधिका से विचलन (7920) ± चिन्हों की उपेक्षा  D
6350	1570
7500	420
7920	0
8360	440
8520	600
$\Sigma X = 38650$	$\Sigma  D  = 3030$

$$\begin{aligned}\text{माध्य} &= \frac{\Sigma X}{N} \\ &= \frac{38650}{5} = 7730\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन} &= \frac{\Sigma |D|}{N} \\ &= \frac{3220}{5} = ₹ 644\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन गुणांक} &= \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माधिका}} \\ &= \frac{644}{7730} = 0.083\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माधिका} &= \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{वें मद का आकार} \\ &= \left(\frac{5+1}{2}\right)\text{वें मद का आकार} \\ &= 3\text{वें मद का आकार} \\ &= ₹ 7920\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन} &= \frac{\Sigma |D|}{N} \\ &= \frac{3030}{5} = \text{Rs } 606\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन गुणांक} &= \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माधिका}} \\ &= \frac{606}{7920} = 0.076\end{aligned}$$

### 9.2.3.2 खंडित श्रेणी से माध्य विचलन की गणना

**उदाहरण 2 :** गणना कीजिए (क) माधिका (ख) माध्य विचलन और (ग) माध्य विचलन का गुणांक।

मद का आकार (X)	6	12	18	24	30	36	42
आवृत्ति (f)	4	7	9	18	15	10	5

हल :

तालिका 9.4: माध्यिका द्वारा माध्य विचलन की गणना

X	f	cf	D	f D
6	4	4	18	72
12	7	11	12	84
18	9	20	6	54
24	18	38	0	0
30	15	53	6	90
36	10	63	12	120
42	5	68	18	90
	$\Sigma f = 68$		$\Sigma  D  = 72$	$\Sigma f D  = 510$



टिप्पणियाँ

$$\text{माध्यिका} = \left( \frac{N+1}{2} \right) \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \left( \frac{68+1}{2} \right) \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 34.5 \text{ वीं मद}$$

$$\text{M.D.} = \frac{\Sigma f |D|}{N} = \frac{510}{68} = 7.5$$

$$\text{माध्य विचलन का गुणांक} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माध्यिका}} = \frac{7.5}{24} = 0.312$$

### अखंडित श्रेणी में माध्य विचलन की गणना

**उदाहरण 3 :** गणना करो (क) माध्य (ख) माध्य विचलन माध्य द्वारा और (ग) माध्य विचलन का गुणांक

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्र की संख्या	5	8	15	16	6

हल : माध्य से माध्य विचलन की गणना

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

तालिका 9.5: माध्य विचलन की गणना

अंक X	छात्र की संख्या f	मध्य बिंदु m	माध्य - 25 10	fd'	D  = m - 27	f D
0-10	5	5	-2	-10	22	110
10-20	8	15	-1	-8	12	96
20-30	15	25	0	0	2	30
30-40	16	35	+1	+16	8	128
40-50	6	45	+2	+12	18	108
	Σf = 50			Σfd' = 10		Σf D  = 472

$$\begin{aligned}\bar{X} &= A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times C \\ &= 25 + \frac{10}{50} \times 10 = 27 \text{ अंक}\end{aligned}$$

$$\text{M.D.} = \frac{\Sigma f|D|}{N} = \frac{472}{50} = 9.44 \text{ अंक}$$

$$\text{माध्य विचलन गुणांक} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माध्य}} = \frac{9.44}{27} = 0.349$$

### माध्य विचलन : एक मूल्यांकन

माध्य विचलन में जमा (+) और ऋण (-) चिह्नों को छोड़ दिया जाता है, जो कि गणितीय अशुद्धि है। अशुद्धि के कारण इसका प्रयोग बीजगणितीय प्रयोगों में नहीं किया जा सकता। यह विधि खुले सिरे वाली श्रेणी में प्रयुक्त नहीं होती।



### पाठगत प्रश्न 9.4

(i) माध्यिका द्वारा माध्य विचलन और माध्य विचलन गुणांक की गणना कीजिए-

प्रति पौधे टमाटर की संख्या	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
पौधों की संख्या	2	5	7	11	18	24	12	8	6	4	3

(ii) माध्य से माध्य विचलन ज्ञात करो-

वर्ग	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
आवृत्ति	3	7	22	60	85	32	8



टिप्पणियाँ

### 9.2.4 मानक विचलन (मानक विचलन)

अपकिरण की माप के लिए सामान्य रूप से प्रयोग किया जाने वाला मानक विचलन अथवा मानक विचलन एक प्रमुख माप है। यह निरपेक्ष अपकिरण की माप करता है। यह समांतर माध्य से लिए गए विचलनों के वर्गों के माध्य का धनात्मक वर्गमूल है। इसे S.D. अथवा  $\sigma_x$  के द्वारा संकेत किया जाता है।

#### 9.2.4.1 व्यक्तिगत श्रेणी में मानक विचलन का आकलन

व्यक्तिगत श्रेणी का मानक विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न चार विधियाँ प्रयुक्त की जाती हैं—

#### 1. वास्तविक माध्य विधि

सभी X चरों का मूल्य N से दर्शाया जाता है, जैसे—  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . इन सभी N का मानक विचलन के लिए वास्तविक माध्य विधि से निम्न प्रकार गणना की जाती है।

- प्रदत्त आंकड़ों का गणितीय माध्य ( $\bar{X}$ ) ज्ञात कीजिए।
- प्रत्येक मद का समांतर माध्य से विचलन ज्ञात करो, जैसे—  $(X_i - \bar{X})$  संज्ञान लीजिए  $\Sigma(X_i - \bar{X}) = 0$
- प्रत्येक विचलन का वर्ग बनाइए, जैसे  $(X_i - \bar{X})^2$
- तीसरे चरण के सभी विचलन वर्गों का जोड़ कीजिए  $\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$
- विचलनों के वर्गों के योग को मदों की संख्या से भाग दीजिए। इस प्रकार प्राप्त किए गए मूल्यों का वर्गमूल ज्ञात कीजिए। निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N}}$$

N = मदों का योग

**2. कल्पित माध्य विधि :** इस विधि का प्रयोग प्रमाण विचलन ज्ञात करने में उस समय किया जाता है, जब समांतर माध्य भिन्न में होती है। इस दशा में उपरोक्त विधि द्वारा सभी मदों का समांतर माध्य से विचलन की गणना करना बड़ा कठिन एवं जटिल होता है। इसीलिए कल्पित माध्य (A) से ही विचलन (D) लेना पड़ता है और विचलनों का वर्ग बनाकर सभी वर्गों का योग कर निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2}$$

यहां  $d = (X - A)$  अर्थात् कल्पित माध्य (A) से विचलन।

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

**3. प्रत्यक्ष विधि :** यह विधि उस समय अधिक उपयोगी होती है, जब समांतर माध्य पूर्ण अंक में आता है और मर्दें अति लघु होती हैं। निम्न सूत्र का प्रयोग कर मानक-विचलन प्राप्त किया जाता है—

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - (\bar{X})^2}$$

यहां  $\bar{X}$  अंकगणितीय माध्य है।

प्रायः प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग शून्य से विचलन लेते समय किया जाता है।

**4. पद विचलन विधि :** इस विधि में हम विचलनों को उभयनिष्ठ वर्ग अंतराल (C) से भाग देते हैं। तत्पश्चात् निम्नलिखित सुप्त का प्रयोग करके मानक विचलन की गणना की जाती है—

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum d'^2}{N} - \left(\frac{\sum d'}{N}\right)^2} \times c$$

यहां  $d' = \left(\frac{X-A}{c}\right)$  जो कल्पित माध्य से प्राप्त होता है, जिसे वर्ग अंतराल (C) से भाग दिया जाता है।

**उदाहरण 7 :** माह फरवरी 2014 के छह दिनों का किसी वस्तु का थोक मूल्य इस प्रकार रहा—

दिन	1	2	3	4	5	6
वस्तु का मूल्य (रु. प्रति क्वींटल)	5	15	25	35	45	55

निम्न निर्देशानुसार मानक विचलन ज्ञात करो—

- वास्तविक माध्य विधि
- कल्पित माध्य विधि
- प्रत्यक्ष विधि और
- पद विचलन विधि

हल:

तालिका 9.6: मानक विचलन की गणना

दिन	कीमत रु. प्रति क्विंटल	$(X - \bar{X})$ $= (X - 30)$	$(X - \bar{X})^2$ $= (X - 30)^2$	$d =$ $(X - 40)$	$d^2 =$ $= (X - 40)^2$	$X^2$	$d' =$ $\frac{X - 40}{5}$	$d'^2$
1	5	-25	625	-35	1225	25	-7	49
2	15	-15	225	-25	625	225	-5	25
3	25	-5	25	-15	225	625	-3	9
4	35	5	25	-5	25	1225	-1	1
5	45	15	225	5	25	2025	1	1
6	55	25	625	15	225	3025	3	9
		$\Sigma(X - \bar{X})$ $= 0$	$\Sigma(X - \bar{X})^2$ $= 1750$	$\Sigma d$ $= -60$	$\Sigma d^2$ $= 2350$	$\Sigma X^2$ $= 7150$	$\Sigma d'$ $= -12$	$\Sigma d'^2$ $= 94$



टिप्पणियाँ

वास्तविक माध्य विधि लागू करने पर

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{180}{6} = 30 \text{ (रु. में)}$$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1750}{6}} = 17.078 \text{ (रु. में)}$$

कल्पित माध्य विधि लागू करने पर

$$\text{यहां } \bar{X} = A + \frac{\sum d}{N} = 40 + \frac{-60}{6} = 30$$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$$

$$\sum d^2 = 2350, \sum d = -60, N = 6$$

$$\therefore (\sigma_x) = \sqrt{\frac{2350}{6} - \left(\frac{-60}{6}\right)^2} = \text{Rs.} 17.078$$





टिप्पणियाँ

**प्रत्यक्ष विधि लागू करने पर**

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - (\bar{X})^2}$$

यहां  $\bar{X} = 30, \sum X^2 = 7150, N = 6$

$$\therefore (\sigma_x) = \sqrt{\frac{7150}{6} - (30)^2} = \text{Rs.}17.078$$

**पद-विचलन विधि लागू करने पर**

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d'}{N}\right)^2} \times c$$

यहां  $c = 5, \sum d^2 = 94, N = 6, \sum d' = -12$

$$\therefore (\sigma_x) = \sqrt{\frac{94}{6} - \left(\frac{-12}{6}\right)^2} \times 5 = \text{Rs.}17.078$$

**टिप्पणी :** माध्य से लिए गए विचलनों का योग शून्य है। किंतु वास्तविक माध्य के अलावा किसी अन्य मूल्य से लिए गए विचलनों का योग शून्य नहीं होता है।

**9.2.4.2 अखंडित श्रेणी में मानक विचलन की गणना करना**

अखंडित श्रेणी में वर्गांतर और आवृत्तियां दी गई होती हैं। इस श्रेणी में मानक-विचलन परिगणित करने में निम्न विधियां अपनाई जाती हैं।

**(i) वास्तविक माध्य विधि**

इस विधि में निम्न चरण अपनाए जाते हैं—

- वितरण का अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।
- वास्तविक माध्य मूल्यों के विचलन ज्ञात कीजिए, जैसे—  $x = m - \bar{X}$
- विचलनों को तदनानुसार आवृत्तियों से गुणा कर  $fx$  प्राप्त करें। याद रखें है। ( $\sum fx = 0$ ).
- ' $fx$ ' मूल्यों को ' $x$ ' मूल्य से गुणा करके ' $fx^2$ ' प्राप्त कीजिए और इन मूल्यों का योग करके  $\sum fx^2$  प्राप्त करें।
- मानक विचलन हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f}}$$

यहां  $x = (m - \bar{X})$  यथा विचलन समांतर माध्य ( $\bar{X}$ ) से लिया जाता है।

### (ii) कल्पित माध्य विधि

इसमें विचलन ज्ञात करते समय निम्न चरणों से गुजरना पड़ता है—

- वर्गों का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।
- मध्य बिंदुओं में से किसी भी मूल्य कल्पित माध्य (A) मानिए। यहां— $d = m - A$
- 'd' के मूल्य को तदनुसार आवृत्तियों से गुणा 'fd' प्राप्त करें। जैसा कि विचलन कल्पित माध्य से परिगणित किया जाता है। इसलिए इस स्तंभ का योग शून्य नहीं होता।
- मानक विचलन ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$$

यह  $d = (M - A)$  कल्पित माध्य (A) से विचलन कीजिए।

### (iii) पद विचलन विधि

मानक विचलन की गणना हेतु निम्न चरणों से गुजरिए—

- वर्गों का मध्य बिंदु (m) प्राप्त कर विचलन (d) उसी प्रकार प्राप्त कीजिए, जैसा कल्पित माध्य विधि में किया था। जैसे— $d = m - A$
- विचलनों को उभयनिष्ठ कारक (Common Factor) (C) से भाग दीजिए। जैसे—  

$$d' = \left(\frac{m - A}{c}\right)$$
- मूल्य (d) को तदनुसार 'f' मूल्यों से गुणा कर 'fd' मूल्य प्राप्त करो।
- 'fd' मूल्यों को 'd' मूल्यों से गुणा करके 'fd<sup>2</sup>' मूल्य प्राप्त करो।
- $\sum fd$  और  $\sum fd^2$  मूल्य प्राप्त करो।
- निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times c$$



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

यहां  $d' = \left( \frac{m - A}{c} \right)$  विचलन कल्पित माध्य से लेकर वर्गांतर (C) से भाग लगाते हैं। वर्गांतर असमान होने की स्थिति में उभयनिष्ठ गुणांक लिया जाता है। m वर्गांतर का मध्य मूल्य है।

### मानक विचलन-रुचिकर आयाम

1. प्रत्येक अवस्था में यदि किसी श्रेणी में स्थिर मूल्य पर वृद्धि या कमी आती है तो मानक विचलन समान ही रहेगा, क्योंकि मानक विचलन केवल मूल रूप से परिवर्तन पर ही निर्भर करता है।
2. किसी श्रेणी को प्रत्येक परख में यदि स्थिर मूल्य से गुणा या भाग दिया जाता है तो मानक विचलन में परिवर्तन आ जाएगा, क्योंकि मानक विचलन पैमाने के परिवर्तन पर आधारित नहीं है।

**उदाहरण 8 :** एक हजार कंपनियों का अध्ययन करने पर हमें निम्न सूचना प्राप्त होती है—

लाभ (करोड़ रु. में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
कंपनियों की संख्या	10	20	30	50	40	30

अर्जित लाभ का मानक विचलन ज्ञात कीजिए—

- (i) वास्तविक माध्य विधि से
- (ii) कल्पित माध्य विधि से
- (iii) पद-विचलन विधि से

**हल:**

**तालिका 9.7: मानक विचलन की गणना**

लाभ करोड़ रु. में)	कम्पनी संख्या	मध्य बिंदु m	fm	d = (m - 40)	d' = $\frac{m - 45}{10}$	fd	fd <sup>2</sup>	fd'	fd' <sup>2</sup>
0-10	10	5	50	-35	-4	-350	12250	-40	160
10-20	20	15	300	-25	-3	-500	12500	-60	180
20-30	30	25	750	-15	-2	-450	6750	-60	120
30-40	50	35	1750	-5	-1	-250	1250	-50	50
40-50	40	45	1800	5	0	200	1000	0	0
50-60	30	55	1650	15	1	450	6750	30	30
			<b>6300</b>	<b>Σd = -60</b>	<b>Σd' = -9</b>	<b>-900</b>	<b>40500</b>	<b>-180</b>	<b>540</b>

(i) वास्तविक माध्य विधि द्वारा

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f}}$$

$$\sum fx^2 = 36000, \sum f = 180$$

$$\therefore (\sigma_x) = \sqrt{\frac{36000}{180}} = 14.142 \text{ (in rupees crores)}$$

(ii) कल्पित माध्य विधि द्वारा

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$$

$$\sum fd^2 = 40500, \sum fd = -900, \sum f = 180, d = X - 40$$

$$\therefore (\sigma_x) = \sqrt{\frac{40500}{180} - \left(\frac{-900}{180}\right)^2} = 14.142 \text{ (करोड़ रु. में)}$$

(iii) पद विचलन विधि द्वारा

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times c$$

$$d' = \frac{m-45}{10}, \sum fd'^2 = 540, \sum fd' = -180, \sum f = 180, c = 10$$

$$\therefore (\sigma_x) = \sqrt{\frac{540}{180} - \left(\frac{-180}{180}\right)^2} \times 10 = 14.142 \text{ (करोड़ रु. में)}$$

**उदाहरण 9 :** निम्न तालिका, भवन निर्माण मजदूरों की दैनिक मजदूरी के आंकड़ों को, जो दैव-निदर्शन विधि द्वारा लिए गए हैं, दर्शाती है। इससे माध्य विचलन और मानक विचलन की गणना कीजिए।



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या
200 - 399	5
400 - 599	15
600 - 799	25
800 - 999	30
1000 - 1199	18
1200 - 1399	7
कुल जोड़	100

हल:

तालिका 9.8: माध्य विचलन गणना

दैनिक मजदूरी (रुपयों में) X	मजदूरों की संख्या (f)	वर्ग (m)	fm	$f_i  m - \bar{X}  = f_i  m - 823.5 $
200 - 399	5	299.5	1497.50	2,620
400 - 599	15	499.5	7492.50	4,860
600 - 799	25	699.5	17487.50	3,100
800 - 999	30	899.5	26985.00	2,280
1000 - 1199	18	1,099.5	19791.00	4,968
1200 - 1399	7	1,299.5	9096.50	3,332
योग	100		82350.00	21,160

$$\text{मानक विचलन} = \frac{\sum f_i |m - \bar{X}|}{\sum f_i} = \frac{21,160}{100} = 211.60 \text{ (₹)}$$

तालिका 9.9: मानक विचलन की गणना

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या	वर्ग (M.V.)	$f_i (m - \bar{X})^2$
200 - 399	5	299.5	1,372,880
400 - 599	15	499.5	1,574,640
600 - 799	25	699.5	384,400
800 - 999	30	899.5	173,280
1000 - 1199	18	1,099.5	1,371,168
1200 - 1399	7	1,299.5	1,586,032
योग	100		6,462,400

$$\text{माध्य विचलन} = \sqrt{\frac{6462400}{100}} = 254.21 \text{ (₹)}$$



**पाठगत प्रश्न 9.5**

1. एक मानकीकृत परीक्षा में सोना, करीना, उमर, मुस्तफा और आमी ने क्रमशः 6, 7, 3, 7 और 2 अंक प्राप्त किए। उनके प्राप्तांकों का मानक विचलन ज्ञात करो।



टिप्पणियाँ

**9.2.4.3 मानक-विचलन का प्रयोग करते हुए दो श्रेणियों के विचलन की तुलना**

मानक विचलन के मूल्यों का तुलनात्मक अध्ययन संभव नहीं है, क्योंकि दो वितरणों में मापन की इकाइयां अलग-अलग हो सकती हैं। अतः तुलना के उद्देश्य से विचलन का गुणांक (CV) ज्ञात करना पड़ता है। इसे कार्ल पियर्सन ने प्रस्तुत किया है:

$$C.V. = \frac{\sigma_X}{\bar{X}} \times 100$$

$$\sigma_X = \text{S.D. of variable } X, \bar{X} = \text{mean of variable } X$$

**उदाहरण 10 :** निम्न तालिका में दो प्रकार के मजदूरों की दैनिक मजदूरी के संक्षिप्त समंक दर्शाए गए हैं—

मजदूरों का प्रकार	दैनिक मजदूरी	
	माध्य	मानक विचलन
I	₹ 100	₹ 20
II	₹ 150	₹ 24

इन दोनों दैनिक मजदूरी वितरणों की तुलना कीजिए

**हल:**

**तालिका 9.10: विचलन का गुणांक की गणना**

तुलना में	वितरण	कारण
औसत मात्रा	II > I	$\bar{X}_{II} = 150 > \bar{X}_I = 100$
विचलन	I > II	$CV_I = \frac{20}{100} \times 100 = 20\% > CV_{II}$ $= \frac{24}{150} \times 100 = 16\%$



टिप्पणियाँ



पाठगत प्रश्न 9.6

- प्रति घंटे के आधार पर प्रदत्त 130 निदर्शनों की मजदूरी विश्लेषण नीचे दिया गया है—  
 माध्य = 60                      विस्तार = 20                      बहुलक = 73  
 विचलन = 324                      माध्यिका = 74                      C.V. समान है  
 (क) 0.30%                      (ख) 30%                      (ग) 5.4%                      (घ) 54%
- अपकिरण की माप सर्वाधिक प्रभावित होती है—  
 (क) मानक विचलन  
 (ख) विस्तार  
 (ग) अंतर चतुर्थक विस्तार
- अपकिरण को वर्णनात्मक माप जो 'माध्य से विचलन' की अवधारणा पर आधारित यह है—  
 (अ) विस्तार    (ब) अंतर चतुर्थक विस्तार  
 (स) विस्तार का निरपेक्ष मूल्य                      (द) मानक विचलन
- मानक विचलन का संख्यात्मक मूल्य कभी नहीं हो सकता—  
 (क) शून्य                      (ख) ऋणात्मक                      (ग) एक
- एक शोधकर्ता ने नीचे दिए गए निदर्शन आंकड़े एकत्र किए हैं, उनका माध्य 5 है—  
 3, 5, 12, 3, 2  
 इनका मानक विचलन है—  
 (क) 8.944                      (ख) 4.062                      (ग) 13.2                      (घ) 16.5                      उत्तर : ख  
 और इसका विचलन गुणांक है—  
 (क) 72.66%                      (ख) 81.24%                      (ग) 264%                      (घ) 330%                      उत्तर : ख

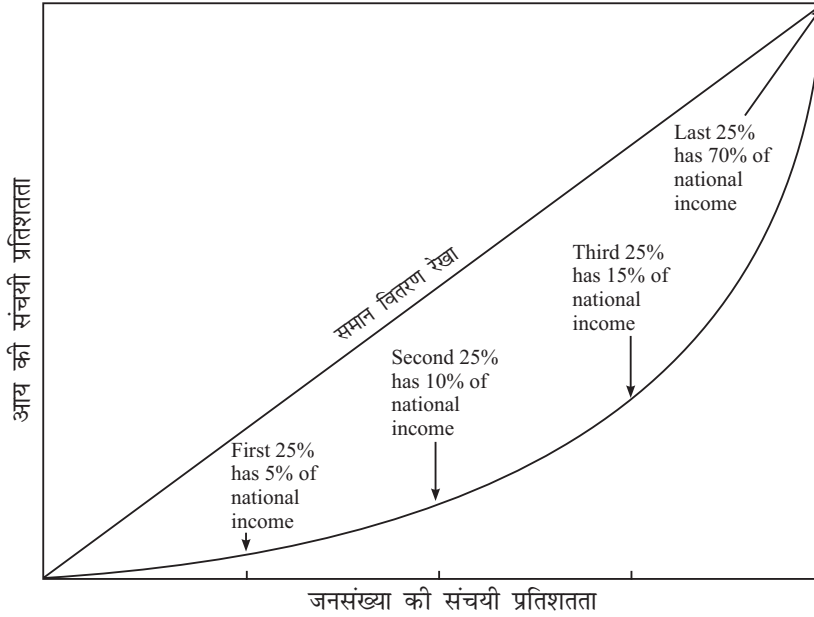
9.2.5 लॉरेंज (Lorenz) वक्र

लॉरेंज वक्र अपकिरण के अध्ययन की ग्राफिक विधि है, जो एक चर जैसे जनसंख्या किसी भी स्वतंत्र चर के समक्ष जैसे आय अथवा निश्चित क्षेत्र के वितरण के संचयी आवृत्ति वक्र को दर्शाता है। अगर आश्रित चर का वितरण समान है तो वक्र एक सीधी 45° की रेखा दर्शाएगा। असमान वितरण भी एक वक्र प्रस्तुत करेगा। इस वक्र और 45° के वक्र के बीच का अंतराल

असमानता अंतराल है। लॉरेंज वक्र का आय और स्वास्थ्य की एकाग्रता की मात्रा को देखने के लिए उपयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, यह 70 प्रतिशत आय के लिए 25 प्रतिशत जनसंख्या वालों को दिखाता है अथवा निचली 25 प्रतिशत जनसंख्या के पास आय का 5 प्रतिशत है (आकृति 1 देखें)। लॉरेंज वक्र समान वितरण की रेखा से जितना दूर होगा, उस शृंखला में असमानता उतनी ही अधिक होगी।



टिप्पणियाँ



### लॉरेंज वक्र खींचने संबंधी विभिन्न चरण

लॉरेंज वक्र के नर्माण के चरण निम्नलिखित प्रकार से हैं—

1. सबसे पहले मूल्यों का संचयी योग निकाला जाता है। अखंडित चर में मध्य मूल्यों के संचयी योग की गणना की जाती है।
2. संचयी आवृत्तियों को जानिए। सभी संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत को x अक्ष पर और संचयी मूल्यों के प्रतिशत को y अक्ष पर प्रकट किया जाता है।
3. प्रत्येक के योग को 100 मानकर संचयी मध्य बिंदुओं और आवृत्तियों को प्रतिशत में दर्शाइए।
4. x अक्ष के शून्य मापदंड को y के मापदंड से मिलाने के लिए जो रेखा खींची जाती है, उसे समान वितरण रेखा कहा जाता है।
5. अब (0, 0) को (100, 100) के साथ मिलाकर एक रेखा खींचिए। इसे समान वितरण की रेखा कहा जाता है।
6. संचयी मूल्य प्रतिशत को संबंधित संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत द्वारा दर्शाइए। लॉरेंज वक्र की प्राप्ति हेतु इन बिंदुओं को मिलाइए।





टिप्पणियाँ



### आपने क्या सीखा

- अपकिरण की प्रमुख माप है—
  - (i) विस्तार
  - (ii) चतुर्थक तथा अर्ध-अंतर चतुर्थक विचलन
  - (iii) मानक विचलन
  - (iv) लॉरेंज वक्र
- विस्तार (R) वितरण के अधिकतम (L) और न्यूनतम मूल्य (S) का अंतर है। यथा— $R = L - S$
- विस्तार गुणांक विस्तार से संबंधित माप है, जो  $\frac{L-S}{L+S}$  से ज्ञात होती है।
- चतुर्थक विचलन का सूत्र है  $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$
- चतुर्थक के गुणांक का सूत्र है  $\text{Coeff of } Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
- मानक विचलन अपकिरण की सबसे महत्वपूर्ण और सामान्यतः प्रयुक्त माप है, जिसे S.D या  $\sigma_x$  से दर्शाते हैं।
- मानक विचलन व्यक्तिगत श्रेणी में निम्न चार तरह से ज्ञात किया जाता है—

#### (i) वास्तविक माध्य विधि

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}}$$

N = अवलोकनों की कुल संख्या

#### (ii) कल्पित माध्य विधि

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$$

यहां D = (X - A) कल्पित माध्य (A) से विचलन किया जाता है।



टिप्पणियाँ

(iii) प्रत्यक्ष विधि

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - (\bar{X})^2}$$

यहां  $(\bar{X}) =$  समांतर माध्य

(iv) पद विचलन विधि

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d'}{N}\right)^2} \times c$$

यहां  $d' = \left(\frac{X - A}{c}\right)$  कल्पित माध्य से लिए गए विचलनों को निकालकर उनके योग को कर वर्गांतर से भाग देते हैं।

- अखंडित शृंखला में मानक विचलन

(i) वास्तविक माध्य विधि

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f}}$$

यहां  $X = (m - \bar{X})$  अंकगणीतय माध्य से विचलन लिया जाता है।

(ii) कल्पित माध्य विधि

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$$

यहां  $d = m - A$  यथा विचलन कल्पित माध्य (A) से किया जाता है।

(iii) पद विचलन विधि

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times c$$

यहां  $d' = \left(\frac{m - A}{c}\right)$  कल्पित माध्य से विचलनों के योग को वर्गांतर (C) से भाग दिया जाता है। जब वर्गांतर असमान होते हैं, m वर्गांतर मध्य मूल्य है।

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

### अपकिरण की माप

- मानक विचलन मौलिक परिवर्तन पर निर्भर है, न कि पैमाने के परिवर्तन पर।
- विचलन गुणांक (C.V.) अपकिरण की एक सापेक्ष माप है, जो दो या दो से अधिक वितरणों की तुलना करने में प्रयुक्त होता है। इसका सूत्र इस प्रकार है—

$$C.V. = \frac{\sigma_X}{\bar{X}} \times 100$$

$\sigma_X$  = विचलन X का मानक विचलन।  $\bar{X}$  = चरों की माध्य

- लॉरेंज वक्र अपकिरण को मापने की ग्राफिक विधि है।



### पाठांत अभ्यास

#### विस्तार

- ए.वी. कंपनी लिमिटेड के शेयरों का सोमवार से शनिवार तक का मूल्य नीचे दिया गया है—

दिन	मूल्य (रु. में)	दिन	मूल्य (रु. में)
सोमवार	200	गुरुवार	160
मंगलवार	210	शुक्रवार	220
बुधवार	208	शनिवार	250

विस्तार और इसके गुणांक की गणना करो।

- दिए गए आंकड़ों का विस्तार बताइए—  
108, 107, 105, 106, 107, 104, 103, 101, 104
- आवृत्ति वितरण के विस्तार का मूल्य ज्ञात करो—

आयु (वर्ष में):	14	15	16	17	18	19	20
छात्र की संख्या	1	2	2	2	6	4	0

- नीचे दिए गए वितरण से विस्तार ज्ञात करो—

ऊंचाई (से.मी. में)	150	151	152	154	159	160	165	166
लड़कों की संख्या	2	2	9	15	18	10	4	1

- निम्न आंकड़ों का विस्तार ज्ञात कीजिए—

लाभ (हजार रु. में);	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
फर्म की संख्या	0	6	0	7	15

6. निम्नांकित वितरण का विस्तार ज्ञात कीजिए-

वर्गांतर	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
आवृत्ति	8	10	15	18	19

**चतुर्थक विचलन**

7. निम्न आंकड़ों का चतुर्थक विचलन ज्ञात करो-

241, 521, 421, 250, 300, 365, 840, 958

8. नीचे दिए गए आंकड़ों से चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक ज्ञात करो-

ऊंचाई (से.मी. में)	150	151	152	153	154	155	156	157	158
छात्र संख्या	15	20	32	35	33	22	20	12	10

9. चतुर्थ विचलन का प्रयोग करते हुए (A) और (B) में निश्चित कीजिए कि किसमें अधिक विचलन है-

A		B	
मध्य बिंदु	आवृत्ति	मध्य बिंदु	आवृत्ति
15	15	100	340
20	33	150	492
25	56	200	890
30	103	250	1420
35	40	300	620
40	32	350	360
45	10	400	187
		450	140

10. निम्न तालिका में चतुर्थक विचलन ज्ञात करो-

आकार:	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
आवृत्ति	6	10	18	30	15	12	10	6	2

11. निम्न आंकड़ों से चतुर्थक विचलन/ गुणांक की गणना कीजिए-

वर्गान्तर	आवृत्तियां
10-15	4
15-20	12
20-25	16
25-30	22
30-40	10
40-50	8
50-60	6
60-70	4
	8



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

### मानक विचलन

12. छात्रों के परीक्षा-परिणाम के प्रतिशत से मानक विचलन निर्धारित कीजिए—

92% 66% 99% 75% 69% 51% 89% 75% 54% 45% 69%

13. पांच दिनों के व्यापार के बाद स्टॉक की कीमत (रु. में) क्रमशः 52, 58, 55, 57, 59 थी। विचलन गुणांक की गणना कीजिए—

14. अद्योलिखित 20 व्यक्तियों की मासिक आय तालिका दी गई है—

आय (रु. में)	व्यक्ति
3500	5
4000	8
4200	5
4300	2

(क) इन 20 व्यक्तियों की आय का माध्य ज्ञात करो।

(ख) इन 20 व्यक्तियों की आय का मानक विचलन भी ज्ञात करो।

15. दी गई तालिका में 50 व्यक्तियों की लंबाई के सामूहिक आंकड़े दिए गए हैं—

लम्बाई (से.मी. में)	आवृत्ति
$120 \leq 130$	2
$130 \leq 140$	5
$140 \leq 150$	25
$150 \leq 160$	10
$160 \leq 170$	8

(क) उपरोक्त 50 व्यक्तियों की आय की माध्य की गणना कीजिए।

(ख) इन 50 व्यक्ति की आय का मानक-विचलन भी ज्ञात कीजिए।

16. अंतर राज्य मार्ग पर एक ऑटो की यात्रा गति की आवृत्तियां नीचे दी जा रही हैं—

प्रतिघंटा गति ( मील में )	आवृत्ति
50 – 54	2
55 – 59	4
60 – 64	5
65 – 69	10
70 – 74	9
75 – 79	5
	35

गति (प्रति घंटा) का माध्य और मानक विचलन ज्ञात करो।

17. सन् 2012 में एक कंपनी के कामगारों की आयु का औसत 22 था। साथ में मानक विचलन 3.96 था। सन् 2013 में आयु का औसत बढ़कर 24 और मानक विचलन बढ़कर 4.08 हो गया। किस वर्ष में आयु वितरण का परिसर अधिक दिखाया गया है? पूर्ण गणना दिखाकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। इसीलिए वर्ष 2012, वितरण का अधिक विसरण दर्शाता है।
18. एक स्थानीय कंपनी के नियोजित कामगारों की आयु वितरण की आवृत्तियां नीचे दी गई हैं—

आयु ( वर्ष में )	आवृत्तियां
30 – 39	2
40 – 49	3
50 – 59	7
60 – 69	5
70 – 79	1

- (क) औसत आयु निर्धारित कीजिए।
- (ख) मानक विचलन की गणना कीजिए।
- (ग) विचलन गुणांक की गणना कीजिए।
19. कुछ छोटे शहरों में सन् 1990 और 2000 के मध्य जनसंख्या में आया परिवर्तन नीचे दर्शाया गया है—



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

अपकिरण की माप

शहर	जनसंख्या परिवर्तन (निवासियों की संख्या)
A	3083
B	1466
C	-461
D	1113
E	-11
F	395
G	3290
H	437

उपरोक्त से निदेशक के लिए निम्नांकित मापों को निर्धारित कीजिए।

- (क) अंकगणितीय माध्य
- (ख) मानक विचलन
- (ग) माध्यिका



पाठगत प्रश्नों के उत्तर

### 9.1

1. (C)                      2. (C)

### 9.2

1. 140

### 9.3

1. (c)                      2. (d)                      3. (c)                      4. (b)

### 9.4

1. माध्यिका = 5 MD = 1.68  
2. M.D 0.915, Coefficient of M.D = 0.336

### 9.5

1. 2.1 अंक

### 9.6

1. (b)                      2. (b)                      3. (d)                      4. (b)  
5. मानक विचलन (b) C.V.