26

प्रायिकता से परिचय

दैनिक जीवन में, हम प्रायः निम्न प्रकार के कथन कहते हैं:

(i) **संभवतः** आज वर्षा होगी।

(ii) रेलगाड़ी **शायद** देर से आएगी।

(iii) यह **संभव** नहीं है कि बैंक ने कोई गलती की है।

(iv) अधिक **संभावना** है कि अगले सितम्बर मास में दालों के मूल्य गिर जाएंगे।

(v) मुझे **संदेह** है कि वह दौड़ में जीन पाएगा।

शब्दों **संभवतः, शायद** अथवा **संभावना** का प्रयोग यह दर्शाता है कि उस घटना, जिसके विषय में हम उपरोक्त कथन कह रहे हैं, के घटने का हमें पूर्ण विश्वास नहीं है। अर्थात्, घटना शायद घट भी सकती है या शायद नहीं भी घट सकती है। प्रायिकता सिद्धांत गणित की वह शाखा है, जिसे अनिश्चितता की स्थितियों के अध्ययन के लिए विकसित किया गया है।

इस सिद्धांत का आरंभ 16वीं शताब्दी में हुआ था। प्रायिकता की परिकल्पना का स्त्रोत संयोग के खेलों जैसे सिक्का उछालने, पासा फेंकने इत्यादि के अध्ययन के अन्तर्गत हुआ तथा आजकल भौतिकी, समाज विज्ञान, अर्थशास्त्र, जनन विज्ञान, जीव विज्ञान, इत्यादि में होता है।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि

- एक यादृच्छिक प्रयोग का अर्थ समझ सकें;
- एक यादृच्छिक प्रयोग की घटना तथा परिणाम में अन्तर बता सकें;
- एक घटना E के घटने की प्रायिकता P(E) को परिभाषित कर सकें;
- P(E) दी हुई हो तो $P(\overline{E})$ ज्ञात कर सकें;

- प्रायिकता P(E) के लिए कथन $0 \leq P(E) \leq 1$ दे सकें;
- एक सिक्के को उछालने, एक पासे को उछालने तथा अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकालने से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करने के लिए प्रायिकता की अवधारणा का प्रयोग कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- सिक्के से संबंधित ज्ञान– चित अथवा पट
- एक पासा, पासे के फलक तथा फलकों पर अंकित संख्याएं
- ताश के पत्तों का ज्ञान– गड्डी में पत्तों की संख्या, 13–13 पत्तों के चार रंग–हुकुम, पान, ईंट तथा चिड़ी– प्रत्येक रंग में बादशाह, बेगम, गुलाम इत्यादि तस्वीर वाले पत्ते
- अनुपात, भिन्न तथा दशमलव की अवधारणाएँ तथा उन पर मूलभूत संक्रियाएं।

26.1 यादृच्छिक प्रयोग और इसके परिणाम

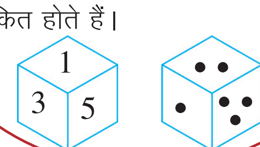
निम्नलिखित स्थितियों का अवलोकर कीजिए:

(1) माना कि हम एक सिक्के को उछालते हैं। हम पहले से ही जानते हैं कि सिक्का दो संभव विधियों में से एक विधि में भूमि पर गिरता है अर्थात या तो चित (H) या पट (T) पर की ओर आता है।

जब हम एक सिक्के की बात करते हैं तो हम यह मानकर चलते हैं कि निष्पक्ष (fair) है अर्थात यह सममित है और ऐसा कोई कारण नहीं है यह एक ओर की अपेक्षा दूसरी ओर अधिक बार भूमि पर गिरेगा।

(2) माना कि हम एक पासा फेंकते हैं। हम पहले से ही जानते हैं कि पासा 6 भिन्न विधियों 1, 2, 3, 4, 5 या 6 में से किसी एक विधि से भूमि पर गिरेगा अर्थात कोई एक संख्या ही ऊपर की ओर आएगी।

पासा एक छः फलकों वाला घन है जो भूमि पर एक समान प्रकार से किसी एक फलक पर गिरता है तथा इन फलकों पर 1 से 6 संख्याएं (1 संख्या एक फलक पर) या बिन्दु अंकित होते हैं।



(3) माना हम 4 बीज लगाते हैं और तीन दिन बाद अंकुरित होने वाले बीजों की संख्या का अवलोकन करते हैं। अंकुरित होने वाले बीजों की संख्या 0, 1, 2, 3, या 4 हो सकती है।

उपरोक्त प्रयोगों से हमें सभी सम्भावित परिणाम ज्ञात हैं परन्तु हम निश्चित रूप से यह प्रागुक्ति नहीं कर सकते हैं कि वास्तव में कौन सा परिणाम प्राप्त होगा। इस प्रकार के प्रयोग **यादृच्छिक प्रयोग** कहलाते हैं।

(1) में, यादृच्छिक प्रयोग के संभावित परिणाम हैं: चित या पट।

(2) में, यादृच्छिक प्रयोग के संभावित परिणाम हैं: 1, 2, 3, 4, 5, 6

(3) में, संभावित परिणाम हैं: 0, 1, 2, 3, 4.

यादृच्दिक प्रयोगों के कुछ अन्य उदाहरण

(i) एक थैले, जिसमें भिन्न भिन्न रंगों की एक जैसी गेंदें हैं, में से बिना देखे एक गेंद निकालना।

(ii) एक अच्छी तरह फेंटी गई ताश के पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता बिना देखे निकालना।

ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं जिस 13–13 पत्ते चार रंग के होते हैं। जो हुकुम (♠) पान (♥) ईंट (♦) और चिड़ी (♣). हुकुम और चिड़ी के पत्ते काले रंग के तथा पत्ते लाल होते हैं। प्रत्येक रंग में पत्ता इक्का, बादशाह, बेगम, गुलाम, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, तथा 2 होते हैं।बादशाह, बेगम व गुलाम तश्वीर वाले पत्ते कहलाते हैं।.

देखें आपने कितना सीखा 26.1

1. निम्न में से कौन कौन से प्रयोग यादृच्छिक प्रयोग हैं?

   (i) माना एक बहुविकल्पी प्रश्न, जिसके चार विकल्प A, B, C, D में से, एक विकल्प सही है, के उत्तर का अनुमान लगाते हैं।

   (ii) अलग अलग पर्चियों पर 1 से 20 तक प्राकृत संख्याएँ लिखी गई हैं (एक पर्ची पर एक संख्या) तथा इन्हें एक बक्से में रख दिया गया है। आप बिना देखे बक्से में से एक पर्ची निकालते हैं।

   (iii) किसी ऊँचाई से आप एक पत्थर फेंकते हैं।

   (iv) हरी और जोहन में से प्रत्येक स्वतंत्र रूप से 1, 2, 3 में से एक संख्या चुनता है।

2. प्रश्न 1 में यादृच्छिक प्रयोगों में क्या क्या संभावित परिणाम हैं?

26.2 एक घटना की प्रायिकता

माना एक सिक्का यादृच्छया उछाला जाता है। दो संभावित परिणाम चित (H) और पट (T) हैं। हम मान सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम H या T के घटना की संभावना एक समान है। अन्य शब्दों में, हम कह सकते हैं कि दो घटनाएँ H और T समान संभावना वाली या समप्रायिक (equally likely) घटनाएं हैं।

इसी प्रकार जब हम एक पासा फेंकते हैं तो यह युक्तिसंगत होगा कि हम छः फलकों (या 6 परिणाम 1, 2, 3, 4, 5, 6) के बारे में यह मान लें कि प्रत्येक फलक पर प्रत्येक संख्या के आने की संभावना एक जैसी है। अन्य शब्दों में, हम कहते हैं कि परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 तथा 6 **समप्रायिक घटनाएँ** हैं।

यादृच्छया उछालने का अर्थ है कि सिक्के को बिना किसी रुकावट या बिना किसी अतिरिक्त सहायता के गिरने देना है।

इससे पहले कि हम एक घटना की प्रायिकता को परिभाषित करें, आइए हम शब्द **घटना** के अर्थ को समझें। एक प्रयोग के एक या अधिक परिणाम एक घटना बनाते हैं। उदाहरणार्थ, एक पासे के फेंकने में, 'पासा एक सम संख्या दर्शाता है' एक घटना है। इस घटना के संबंधित परिणाम 2, 4 या 6 हैं। तथापि घटना को प्रायः एक परिणाम के रूप में भी प्रयोग किया जाता है। सिक्के को उछालने की अवस्था में, "सिक्का चित दर्शाता है" या सिक्का पट दर्शाता है, प्रत्येक एक घटना है। पहली घटना परिणाम 'H' के संगत है तथा दूसरी घटना परिणाम 'T' के संगत है। यदि हम घटना E 'सिक्का चित दर्शाता है' और घटन F, 'सिक्का पट दर्शाता है' मान लें, तो E तथा F **प्रारम्भिक घटनाएँ** कहलाती हैं। एक घटना जिसमें प्रयोग का केवल एक परिणाम हो, **प्रारम्भिक घटना** कहलाती है।

एक घटना E की प्रायिकता, जिसे P(E) द्वारा दर्शाया जाता है निम्न से परिभाषित है:

$$P(E) = \frac{\textbf{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\textbf{प्रयोग के सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$$

इसमें माना गया है कि सभी परिणाम समप्रायिक हैं।

इस पाठ में हम वही प्रयोग लेगें जिसके परिणाम समप्रायिक हैं।

हम अब प्रायिकता ज्ञात करने संबंधी कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 26.1: एक सिक्का एक बार उछाला जाता है (i) एक चित (ii) एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: माना घटना E = 'एक चित प्राप्त करना'

प्रयोग के संभावित परिणाम हैं: चित (H), पट (T)

संभावित परिणामों की संख्या = 2

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1 (चित)

E की प्रायिकता = P(E) = P (चित)

$$= \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार यदि घटना F = 'एक पट प्राप्त करना', तो

$$P(F) = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 26.2: एक पासा एक बार फेंका जाता है। संख्या 3 के आने की प्रायिकता क्या है?

हल: माना घटना E = 'संख्या 3 का आना' है।

प्रयोग के संभावित परिणाम : 1, 2, 3, 4, 5, 6

इसलिए संभावित परिणामों की संख्या = 6

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1 (अर्थात 3)

अतः, $P(E) = P(3) = \frac{1}{6}$

1 ← E के अनुकूल परिणामों की संख्या

6 ← कुल संभावित परिणामों की संख्या

उदाहरण 26.3: एक पासा एक बार उछाला जाता है। 3 को छोड़कर अन्य संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: माना घटना F = '3 को छोड़कर अन्य संख्या का आना'

संभावित परिणाम हैं : 1, 2, 3, 4, 5, 6

संभावित परिणामों की कुल कुल संख्या = 6

अनुकूल परिणामों की संख्या (1, 2, 4, 5, 6) = 5

$$P(F) = \frac{5}{6}$$

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 26.2 की घटना F, उदाहरण 26.2 की घटना (E नहीं) के समान है।

उदाहरण 26.4: एक थैले में 2 लाल गेंदे, 3 नीली गेंदें तथा 4 काली गेंदें हैं। थैले में से एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। (i) लाल (ii) नीली (iii) काली (iv) नीली गेंद नहीं के आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

(i) माना लाल गेंद निकालने की घटना E है।

प्रयोग के कुल संभावित परिणाम = 2 (लाल) + 3 (नीली) + 4 (काली) = 9

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

$\therefore$ P(लाल गेंद) = P(E) = $\frac{2}{9}$

(ii) माना नीली गेंद निकालने की घटना F है।

$\therefore$ P(नीली गेंद) = P(F) = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(iii) माना काली गेंद निकालने की घटना G है।

$\therefore$ P (काली गेंद) = P(G) = $\frac{4}{9}$

(iv) माना कि घटना ''नीली गेंद नहीं निकाली गई'', H है।

यहाँ नीली गेंद नहीं का अर्थ लाल या काली गेंद है।

$\therefore$ H के अनुकूल परिणाम हैं = 2 + 4 = 6

$\therefore$ P(H) = $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

उदाहरण 26.5: अच्छी तरह फेंटी गई ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता

(i) लाल रंग का है। (ii) काले रंग का है।

हल: (i) माना घटना E = 'निकाला गया पत्ता लाल रंग का है'

लाल रंग के पत्तों की संख्या = 13 + 13 = 26

$\therefore$ E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 26

कुल पत्तों की संख्या = 52

$\therefore$ P(E) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

(ii) माना घटना F = निकाला गया पत्ता काले रंग का है।

काले पत्तों की संख्या = 13 + 13 = 26

$\therefore$ P(F) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

उदाहरण 26.6: एक पासा एक बार फेंका जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर (i) 7 से छोटी संख्या आएगी? (ii) 7 से बड़ी संख्या आएगी?

हल: (i) माना घटना E = '7 से छोटी संख्या'

E के अनुकूल परिणामों की संख्या (1, 2, 3, 4, 5, 6) = 6

$$\therefore P(E) = \frac{6}{6} = 1$$

(ii) माना घटना F = '7 से बड़ी संख्या'

F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 0 (Θ पासे के किसी भी फलक पर 7 से बड़ी संख्या नहीं होती)

$$\therefore P(F) = \frac{0}{6} = 0$$

देखें आपने कितना सीखा 26.2

1. पासे को 1 बार फेंकने पर संख्या 5 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक पासा एक बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि पासे पर

   (i) संख्या 7 आएगी?

   (ii) 5 से छोटी संख्या आएगी?
3. 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इस पत्ते का बादशाह होने की प्रायिकता क्या होगी?
4. 0 तथा 20 के बीच में से एक पूर्णांक चुना जाता है। चुने हुए पूर्णांक के अभाज्य संख्या होने की प्रायिकता क्या है?
5. एक थैले में 3 लाल और 3 सफेद गेंदे हैं। बिना देखे, थैले से 1 गेंद निकाली जाती है। क्या प्रायिकता होगी कि ये गेंद

   (i) लाल रंग की है (ii) सफेद रंग की है?
6. 3 पुरुष और 4 स्त्रियाँ से एक साक्षात्कार के लिए उपस्थित होती हैं जिसमें एक प्रत्याशी चुना जाना है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया व्यक्ति एक

   (i) पुरुष है (ii) स्त्री है।

26.3 प्रायिकता के बारे में कुछ और

प्रायिकता के कई रोचक गुणधर्म हैं। हम इनको उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

अवलोकन 1: उपरोक्त उदाहरण 26.6 में,

(a) घटना E सदा घटेगी क्योंकि पासे पर प्रत्येक संख्या सदा 7 से छोटी होती है। ऐसी घटना जिसके सभी संभावित परिणाम उसके अनुकूल हैं, **निश्चित घटना** कहलाती है। अन्य शब्दों में जो घटना अवश्य ही घटेगी, **निश्चित घटना** कहलाती है। निश्चित घटना की प्रायिकता 1 होती है।

(b) घटना F का घटित होना असंभव है क्योकि पासे पर कोई भी संख्या 7 से बड़ी नहीं होती है। ऐसी घटना, जो कभी घटित नहीं हो सकती, **असंभव घटना** कहलाती है। असंभव घटना की प्रायिकता 0 होती है।

(c) प्रायिकता की परिभाषा से, किसी घटना E की प्रायिकता P(E), 1 से अधिक नहीं हो सकती है क्योंकि अंश में संख्या, E के अनुकूल परिणामों की संख्या है, जो हर की संख्या (कुल संभावित परिणामों की संख्या) से बड़ी नहीं हो सकती है।

(d) क्योंकि अंश तथा हर में प्राकृत संख्याएँ हैं, अतः P(E) ऋणात्मक भी नहीं हो सकती है।

(a), (b), (c) तथा (d) से P(E) सदा 0 से लेक 1 तक होती है, अर्थात

$$0 \le P(E) \le 1$$

अवलोकन 2: उदाहरण 26.1 में, दोनों घटनाएँ 'H का आना' तथा 'T का आना' प्रारम्भिक घटनाएँ हैं तथा

$$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

इसी प्रकार 1 पासे को एक बार फेंकने के प्रयोग में, प्रारम्भिक घटनाएँ हैं 1, 2, 3, 4, 5 और 6 को प्राप्त करना, तथा

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि किसी प्रयोग की प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योगफल सदा 1 होता है।

अवलोकन 3: उदाहरण 26.2 तथा 26.3 से,

$$3 \text{ की प्रायिकता} + \text{तीन के अतिरिक्त अन्य संख्या की प्रायिकता} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

अर्थात $\quad P(3) + P(3 \text{ नहीं}) = 1$

अर्थात $P(E) + P(\text{E नहीं}) = 1$ ...(1)

इसी प्रकार उदाहरण 26.1 से

$$P(H) = P(E) = \frac{1}{2}$$

$$P(T) = P(F) = \frac{1}{2}$$

इसलिए $P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

अतः, $P(E) + P(\text{E नहीं}) = 1$ [पट का आना = कोई चित न आना] ...(2)

(1) और (2) से, हम देखते हैं कि E के लिए,

$$P(E) + P(\text{E नहीं}) = 1$$

या $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ [हम 'E नहीं' को $\overline{E}$ द्वारा दर्शाते हैं]

घटना $\overline{E}$, घटना E की **पूरक घटना** कहलाती है। अर्थात E तथा $\overline{E}$ **पूरक घटनाएँ** हैं।

व्यापक रूप में, किसी घटना E के लिए, निम्न सदा सत्य है

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

उदाहरण 26.7: यदि $P(E) = \frac{2}{7}$ हो, तो 'E नहीं' की क्या प्रायिकता है?

हल: $P(E) + P(\text{E नहीं}) = 1$

इसलिए $P(\text{E नहीं}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

उदाहरण 26.8: एक पासे को एक बार फेंकने पर पासे पर 5 नही आने की क्या प्रायिकता होगी?

हल: माना '5 का आना' घटना E है।

अतः हमें P(E नहीं), अर्थात $P(\overline{E})$ ज्ञात करना है।

अब $P(E) = \frac{1}{6}$

इसलिए $P(\overline{E}) == 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

उदाहरण 26.9: अच्छी तरह फेंटी गई ताश की 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह एक तस्वीर वाला पत्ता है।

हल: कुल संभावित परिणाम = 52

माना घटना E = ''एक तस्वीर वाला पत्ता''

E के अनुकूल परिणामों की संख्या $= 3 \times 4 = 12$

[बादशाह, बेगम और गुलाम]

$$\therefore \text{P(एक तस्वीर वाला पत्ता)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

उदाहरण 26.10: एक सिक्का दो बार उछाला जाता है। प्रत्येक बार चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: आइए हम चित के लिए "H" पट के लिए "T" लिखें।

इस प्रयोग के संभावित परिणाम हैं: HH, HT, TH, TT

HH का अर्थ दोनों बार चित

HT का अर्थ पहला चित दूसरा पट

TH का अर्थ पहला पट और दूसरा चित

TT का अर्थ दोनों बार पट

अतः कुल संभावित परिणाम = 4

माना घटना E = ''दोनों बार चित''

अनुकूल परिणाम = HH

अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$$\therefore \text{P(HH)} = \frac{1}{4}$$

उदाहरण 26.11: संयोग से 100 अच्छी अंगूठियों में 10 दोषपूर्ण अंगूठियाँ मिल जाती हैं। देख कर यह बताना संभव नहीं कि कोई अंगूठी दोषपूर्ण है या नहीं। इस समूह से एक अंगूठी यादृच्छया निकाली जाती है। क्या प्रायिकता होगी कि यह अंगूठी अच्छी अंगूठी है?

हल: कुल संभावित परिणाम = 10 + 100 = 110

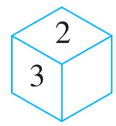
'अच्छी अंगूठी' के अनुकूल परिणामों की संख्या = 100

$\therefore$ P(अच्छी अंगूठी) $= \dfrac{100}{110} = \dfrac{10}{11}$

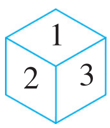
उदाहरण 26.12: दो पासे एक काल और दूसरा नीला, एक साथ उछाले जाते हैं। कुल संभावित परिणाम लिखिए। दोनों पासों पर एक ही संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: सभी संभावित परिणाम नीचे दिए गए हैं। इनमें कोष्ठ में पहली संख्या काले रंग के पासे की है और दूसरी संख्या नीले रंग के पासे की है।

नीले रंग का पासा



काले रंग का पासा



	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

कुल संभावित परिणामों की संख्या $= 6 \times 6 = 36$

घटना E 'दोनों पासों पर एक ही संख्या' के अनुकूल परिणाम हैं: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) और (6, 6)

$\therefore$ घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6.

$\therefore$ P(E) $= \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

देखें आपने कितना सीखा 26.3

1. रिक्त स्थानों को भर कर निम्न कथनों को पूरा कीजिए:

   (a) एक घटना की प्रायिकता सदा ________ के बराबर या बड़ी परन्तु ________ से छोटी या बराबर होती है।

   (b) उस घटना, जो सदा घटित होती है कि प्रायिकता ________ होती है। ऐसी घटना ________ घटना कहलाती है।

(c) वह घटना, जो कभी भी घटित नहीं होगी, की प्रायिकता __________ होती है। ऐसी घटना__________ घटना कहलाती है।

(d) दो पूरक घटनाओं की प्रायिकताओं का योगफल __________ होता है।

(e) एक प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योगफल __________ होता है।

2. एक पासा एक बार फेंका जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए किः

(a) एक सम संख्या आएगी

(b) एक विषम संख्या आएगी

(c) एक अभाज्य संख्या आएगी

3. प्रश्न 2 में, सत्यापित कीजिए कि

P(एक सम संख्या) + P(एक विषम संख्या) = 1

4. एक पासा एक बार फेंका जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) 4 से छोटी संख्या आएगी

(ii) 4 के बराबर या 4 से बड़ी संख्या आएगी

(iii) एक भाज्य संख्या आएगी

(iv) ऐसी संख्या जो भाज्य संख्या नहीं है

5. यदि $P(E) = 0.88$ हो तो 'E नहीं' की क्या प्रायिकता होगी?

6. यदि $P(\overline{E}) = 0$ हो, तो $P(E)$ ज्ञात कीजिए।

7. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता एकः

(i) लाल पत्ता होगा

(ii) काला पत्ता होगा

(iii) लाल बेगम होगा

(iv) काले रंग का इक्का होगा

(v) हुकुम का गुलाम होगा

(vi) चिड़ी का बादशाह होगा

(vii) एक तस्वीर वाला पत्ता नहीं होगा

(viii) ईंट का गुलाम नहीं होगा

8. एक थैले में 15 सफेद गेंदे और 10 नीली गेंदें हैं। थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। क्या प्रायिकता होगी कि यह गेंद

(i) नीले रंग की नहीं है?

(ii) सफेद रंग की नहीं है।

9. एक थैले में 3 लाल, 4 हरे और 2 नीले कंचे हैं। यदि इसमें से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाए, तो कया प्राथमिकता होगी कि यह

(i) हरा नहीं है? (ii) लाल नहीं है? (iii) नीला नहीं है?

10. एक ही समय दो विभिन्न सिक्के उछाले जाते हैं। सभी संभावित परिणाम लिखिए। एक सिक्के पर चित तथा दूसरे पर पट आने की क्या प्रायिकता होगी?

11. ऊपर दिए गए प्रश्न 10 में, दोनों सिक्कों पर पट होने की प्रायिकता क्या होगी?

12. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इन पर आए संख्याओं का योगफल लिख लिया जाता है। क्या प्रायिकता होगी कि यह योग

(i) 7 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 10 (v) 12 हो।

13. संयोगवश 8 खराब खिलौने उसी प्रकार के 92 अच्छे खिलौनों में मिल जाते हैं। इस समूह में से एक खिलौना यादृच्छया निकाला जाता है। इस खिलौने के खराब होने की क्या प्रायिकता होगी?

आइए दोहराएँ

- एक यादृच्छिक प्रयोग वह प्रयोग हाता है जिसमें एक से अधिक परिणाम हों तथा प्रयोग को करने से पहले आने वाले परिणाम का अनुमान नहीं लगाया जा सकता।
- एक प्रयोग के एक या इससे अधिक परिणाम एक घटना बनाते हैं।
- एक घटना, जिसका केवल एक परिणाम हो, प्रारम्भिक घटना कहलाती है ।
- एक घटना E की प्रायिकता P(E) निम्न से परिभाषित होती है:

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$$, जबकि सभी परिणाम समप्रायिक हैं।

- $0 \le P(E) \le 1$
- यदि $P(E) = 0$ हो, तो E एक असंभव घटना कहलाती है। यदि $P(E) = 1$ हो, तो E एक निश्चित घटना कहलाती है।
- एक प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योगफल 1 होता है।
- $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ होता है, जहाँ कि E तथा $\bar{E}$ पूरक घटनाएँ हैं।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन से कथन सत्य (T) और कौन से कथन असत्य (F) हैं:

   (i) एक घटना की प्रायिकता 1.01 हो सकती है।

   (ii) यदि $P(E) = 0.08$, तब $P(\overline{E}) = 0.02$ होगा।

   (iii) एक असंभव घटना की प्रायिकता 1 होती है।

   (iv) किसी घटना E के लिए $0 \le P(E) \le 1$ होता है।

   (v) $P(\overline{E}) = 1 + P(E)$ होता है।

2. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। क्या प्रायिकता होगी कि यह पत्ता लाल तस्वीर वाला पत्ता होगा।

3. दो सिक्कों को एक साथ एक बार उछाला जाता है। कम से कम एक चित आने की प्रायिकता क्या होगी?[संकेत: P(कम से कम 1 चित) = 1 – P(कोई चित नहीं)]

4. एक पासा दो बार फेंका जाता है तथा हर बार आने वाली संख्याओं को नोट कर लिया जाता है। इसकी कया प्रायिकता होगी कि दोनों संख्याओं का योगफल

   (i) 12 से बड़ा होगा? (ii) 12 से छोटा होगा?

   (iii) 11 से बड़ा होगा? (iv) 2 से बड़ा होगा?

5. प्रश्न 4 में, संख्याओं का गुणनफल 12 होने की प्रायिकता क्या होगी?

6. प्रश्न 4 में, संख्याओं का अन्तर 2 होने की प्रायिकता क्या होगी?

7. एक थैले में 15 लाल गेंदें और कुछ हरी गेंदे हैं। यदि एक हरी गेंद निकालने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ हो, तो हरी गेंदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

8. निम्न में से कौन किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.01 (C) 12% (D) 0.3

9. दो पासों के एक बार फेंकने से, योग 2 आने की प्रायिकता है:

   (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{1}{36}$ (D) $\frac{35}{36}$

10. दो सिक्कों को एक साथ एक बार उछालने पर, 1 चित और 1 पट आने की प्रायिकता है:

   (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

26.1

1. (i), (ii) and (iii) 2. (i) A, B, C, D (ii) 1, 2, 3, ..., 20

(iii) (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)

26.2

1. $\frac{1}{6}$ 2. (i) 0 (ii) $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{1}{13}$ 4. $\frac{8}{19}$

5. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$ 6. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{4}{7}$

26.3

1. (a) 0, 1 (b) 1, निश्चित घटना (c) 0, असंभव घटना
   (d) 1 (e) 1

2. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

4. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{2}{3}$

5. 0.12 6. 1

7. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{26}$ (iv) $\frac{1}{26}$ (v) $\frac{1}{52}$ (vi) $\frac{1}{52}$
   (vii) $\frac{10}{13}$ (viii) $\frac{51}{52}$

8. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{5}$

9. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{7}{9}$

10. HH, HT, TH, TT, $\frac{1}{2}$

11. $\frac{1}{4}$ 12. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{36}$ (iii) $\frac{1}{9}$ (iv) $\frac{1}{12}$ (v) $\frac{1}{36}$

13. $\frac{2}{25}$

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (i) F	(ii) T	(iii) F	(iv) T	(v) F	
2. $\frac{3}{26}$	3. $\frac{3}{4}$	4. (i) 0	(ii) 1	(iii) $\frac{1}{36}$	(iv) 1
5. $\frac{1}{9}$	6. $\frac{2}{9}$	7. 3	8. (B)	9. (C)	10. (C)

माध्यमिक पाठ्यक्रम
गणित

अभ्यास कार्य–सांख्यिकी

अधिकतम अंक: 25 **समय : 45 मिनट**

अनुदेश

1. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पुस्तिका के अलग–अलग पृष्ठ पर दीजिए।
2. निम्न सूचना अपनी उत्तर पुस्तिका में दीजिए।

   नाम

   नामांकन संख्या

   विषय

   अभ्यास कार्य का प्रकरण (Topic)

   पता
3. आप अपने अभ्यास कार्य की जांच अध्ययन केन्द्र पर अपने विषय अध्यापक से कराईए जिससे आपके कार्य का उचित परिष्करण मिल सके।

अपना अभ्यास कार्य राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान को मत भेजिए।

1. आंकड़ों में, कोई विशेष संख्या कितनी बार आती है, इसको कहते हैं 1

   (A) बारंबारता

   (B) संचयी बारंबारता

   (C) वर्ग माप

   (D) चर

2. निम्न संचयी बारंबारता बंटन में 40–50 वर्ग की बारंबारता है: 1

वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
संचयी बारंबारता	15	45	70	80	100	110

(A) 80 (B) 25

(C) 10 (D) 20

टिप्पणी

3. 12, 16, 15 और 17 का माध्य है 1

(A) 14.5 (B) 15

(C) 15.5 (D) 17

4. यदि आंकड़ों के प्रत्येक विचर को 5 से बढ़ा दिया जाए, तो माध्य 1

(A) वही रहेगा (B) 5 से बढ़ जाएगा

(C) मूल माध्य का 5 गुना हो जाएगा (D) 5 से घट जाएगा

5. प्रेक्षणों 8, 9, 16, 15, 11, 13, 12, 14, 10 का माध्यक है 1

(A) 10 (B) 11.5

(C) 12 (D) 12.5

6. पासों के एक जोड़े का एक बार उछाला गया। सभी संभव परिणाम लिखिए। 2

7. दो सिक्कों को एक बार उछाला गया। कम से कम एक चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

8. एक पासा एक बार उछाला गया। अभाज्य संख्या के आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

9. बढ़ते क्रम में लिए गए निम्न प्रेक्षणों का माध्यक 32 है। a का मान ज्ञात कीजिए। 2

12, 14, 15, 27, a + 2, a + 3, 35, 36, 40, 49

10. x का मान ज्ञात कीजिए यदि निम्न प्रेक्षणों का बहुलक 12 है। 2

15, 16, 19, 12, 13, 16, 12, 12, 12, 16, x

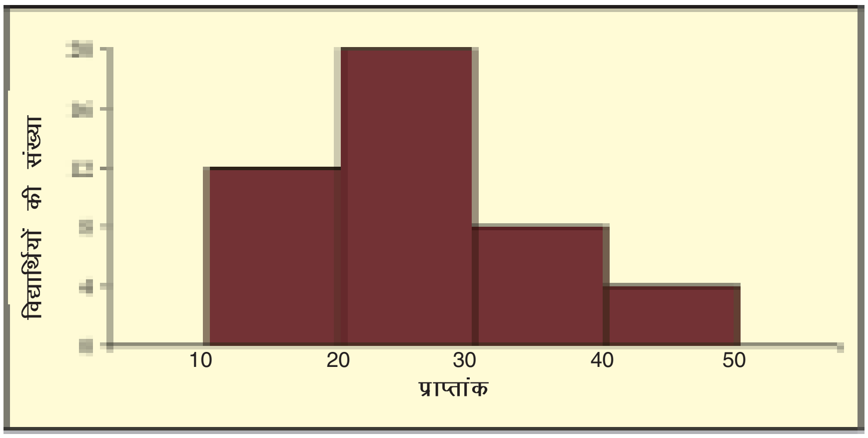
11. नीचे दिए गए, एक स्कूल के 125 विद्यार्थियों के दैनिक जेब खर्च के आंकड़ों का आयत चित्र खींचिए। 4

दैनिक जेब खर्च (₹ में)	विद्यार्थियों की संख्या
10-20	20
20-30	30
30-40	25
40-50	35
50-60	15

अथवा

(केवल दृष्टि विकलांग विद्यार्थियों के लिए)

निम्नलिखित आयत चित्र को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दें



(i) कितने विद्यार्थियों ने 20 से 40 तक अंक प्राप्त किए?

(ii) कितने विद्यार्थियों ने 20 से कम अंक प्राप्त किए?

12.निम्न बंटन का माध्य 25 है। यदि बारंबारताओं का योग 25 है तो x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात कीजिए। 6

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
बारंबारताएं	1	x_1	5	7	x_2	3	1