



21

ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

पिछले पाठ में, आपने आयतों, वर्गों, त्रिभुजों, समलंबों, वृत्तों, इत्यादि जैसी समतल आकृतियों के परिमाणों और क्षेत्रफलों के बारे में अध्ययन किया है। ये समतल आकृतियाँ इसलिए कहलाती हैं, क्योंकि इनमें से प्रत्येक पूर्ण रूप से एक ही तल में स्थित होती हैं। परंतु दैनिक जीवन में, हमें जो अधिकांशतः वस्तुएं देखने को मिलती हैं, पूर्ण रूप से एक ही तल में स्थित नहीं होती हैं। इनमें से कुछ वस्तुएं ईंटें, गेंदें, आइसक्रीम कोन, ड्रम, इत्यादि हैं। ये वस्तुएं ठोस वस्तुएं या **त्रिविमीय (Three dimensional)** वस्तुएं कहलाती हैं। इन ठोसों को निरूपित करने वाली आकृतियाँ **ठोस आकृतियाँ** या **त्रिविमीय आकृतियाँ** कहलाती हैं।

कुछ सामान्य ठोस आकृतियाँ घनाभ, धन, बेलन, भांकु और गोला है। इस पाठ में, हम इन सभी ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों के बारे में अध्ययन करेंगे।



उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के बाद, आप समर्थ हो जाएंगे कि

- एक ठोस आकृति के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के अर्थों का स्पष्ट कर सकें;
- ऐसी स्थितियों की पहचान कर सकें, जहाँ पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता है तथा जहाँ आयतन ज्ञात करने की आवश्यकता है;
- संगत सूत्रों का प्रयोग करके, घनाभों, धनों, बेलनों, भांकुओं, गोलों और अर्धगोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कर सकें;
- संगत सूत्रों का प्रयोग करके, घनाभों, धनों, बेलनों, भांकुओं, गोलों और अर्धगोलों के आयतन ज्ञात कर सकें;
- उपरोक्त ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों से सम्बंधित कुछ दैनिक जीवन की समस्याओं को हल कर सकें।



टिप्पणी

आपेक्षित पूर्व ज्ञान

- समतल सरल रेखीय आकृतियों के परिमाण और क्षेत्रफल
- वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल
- संख्याओं पर चारों आधारभूत संक्रियाएं
- एक या दो चरों वाले समीकरणों का हल करना

21.1 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के अर्थ

आकृति 21.1 में दी हुई निम्न वस्तुओं को देखिए :



आकृति 21.1

ज्यामितीय रूप से इन वस्तुओं को त्रिविमीय या ठोस आकृतियों के रूप में निम्न प्रकार निरूपित किया जाता है:

वस्तु

ईंट, अलमारी
पासा, चाय का पैकेट
ड्रम, पाउडर का डिब्बा
जोकर की टोपी, आइसक्रीम कोन
फुटबाल, गेंद
कटोरा

ठोस आकृति

घनाभ
घन
बेलन
भांकु
गोला
अर्धगोला



आपको याद होगा कि आयत ऐसी आकृति है जो केवल अपनी भुजाओं से मिल कर बनी होती है। आपको यह भी याद होगा कि आयत की सभी भुजाओं की लंबाइयों का योग उसका **परिमाप** कहलाता है तथा उसके द्वारा परिबद्ध (धेरे गए) क्षेत्र की माप को उसका **क्षेत्रफल** कहलाता है। इसी प्रकार एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग उसका परिमाप तथा त्रिभुज द्वारा परिबद्ध क्षेत्र की माप उसका क्षेत्रफल कहलाता है। दूसरे भावों में समतल आकृति, अर्थात् त्रिभुज या आयत की परिसेमा की माप उसका **परिमाप** कहलाती है तथा उस समतल आकृति द्वारा परिबद्ध तलीय क्षेत्र की माप उसका **क्षेत्रफल** कहलाती है।

इसी परंपरा का पालन करते हुए, एक ठोस आकृति केवल उसकी परिसेमा (अर्थात् बाहरी पृष्ठ) से बनी हुई होती है। उदाहरणार्थ, एक घनाभ केवल उसके छः आयताकार क्षेत्रों से मिलकर बनता है (जो उसके **फलक** कहलाते हैं)। इसी प्रकार, गोला केवल उसकी बाहरी पृष्ठ या परिसेमा से ही बना है। समतल आकृतियों की ही तरह, ठोस आकृतियों को भी दो तरीकों से मापा जा सकता है, जैसा नीचे दर्शाया गया है:

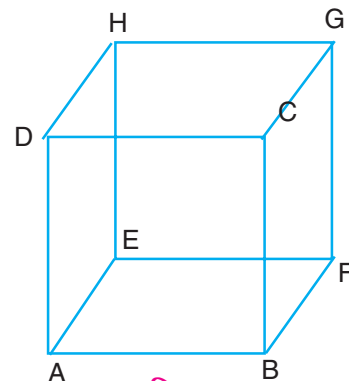
- (1) ठोस को बनाने वाली बाहरी पृष्ठ या परिसेमा को मापना। यह ठोस आकृति का **पृष्ठीय क्षेत्रफल (Surface area)** कहलाता है
- (2) ठोस आकृति द्वारा परिबद्ध स्पेस क्षेत्र (Space Region) को मापना। यह ठोस आकृति का **आयतन (Volume)** कहलाता है।

अतः, यह कहा जा सकता है कि पृष्ठीय क्षेत्रफल स्वयं किसी ठोस आकृति की माप होती है तथा आयतन उस ठोस आकृति द्वारा परिबद्ध स्पेस क्षेत्र की माप होती है। जिस प्रकार क्षेत्रफल वर्ग इकाइयों में मापा जाता है, उसी प्रकार आयतन को **घन इकाइयों (Cubic units)** में मापते हैं। यदि इस इकाई को 1 सेमी भुजा वाला एक घन लिया जाए, तो आयतन की इकाई सेमी³ होती है, यदि इसे 1 मी भुजा वाला घन लें, तो आयतन की इकाई मी³ होती है, इत्यादि।

दैनिक जीवन में, हमारे सम्मुख अनेक ऐसी स्थितियाँ आती हैं, जब हमें पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता होती है तथा अनेक स्थितियाँ ऐसी भी होती हैं, जब हमें आयतन ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, यदि हम किसी कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी कराना चाहते हैं, तो हमें दीवारों और छत का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा। दूसरी ओर, यदि हम किसी बर्तन में दूध या पानी रखना चाहते हैं या किसी गोदाम में अनाज रखना चाहते हैं, तो हमें आयतन ज्ञात करने की आवश्यकता होगी।

21.2 घनाभ और घन

जैसा पहले बताया जा चुका है कि ईंट, चॉक का डिब्बा, माचिस की डिब्बी, पुस्तक, इत्यादि एक घनाभ (Cuboid) के उदाहरण हैं। आकृति 21.2 एक घनाभ निरूपित करती है। आकृति से यह सरलता से देखा जा सकता है कि एक घनाभ के आयताकार क्षेत्रों के रूप में छः **फलक (Faces)** होते हैं।



आकृति 21.2



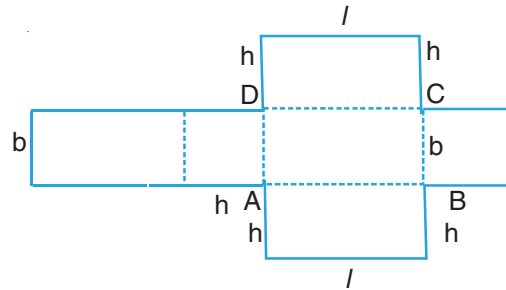
टिप्पणी

ये ABCD, ABFE, BCGF, EFGH, ADHE और CDHG हैं। इनमें से सम्मुख फलक ABFE और CDHG, ABCD और EFGH तथा ADHE और BCGH क्रमशः परस्पर सर्वांगसम और समांतर हैं। दो आसन्न फलक एक रेखाखंड पर मिलते हैं, जो घनाभ का एक किनारा या कोर (Edge) कहलाता है। उदाहरणार्थ, फलक ABCD और ABFE किनारे AB पर मिलते हैं। एक घनाभ के कुल 12 किनारे होते हैं। बिंदु A, B, C, D, E, F, G और H घनाभ के कोने या भीर्ष (Vertices) कहलाते हैं। अतः एक घनाभ के 8 शीर्ष या कोने होते हैं।

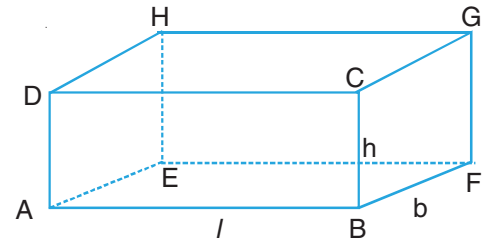
यह भी देखा जा सकता है कि प्रत्येक शीर्ष पर तीन किनारे मिलते हैं। इन तीनों में से एक को लंबाई कहा जाता है। दूसरे किनारे को चौड़ाई तथा तीसरे किनारे को ऊँचाई (या गहराई) कहा जाता है। इन्हें प्रायः क्रम 1: l , b और h से व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि $AB (= EF = CD = GH)$ घनाभ की लंबाई है, $AE (= BF = CG = DH)$ चौड़ाई है तथा $AD (= EH = BC = FG)$ उसकी ऊँचाई है।

ध्यान दीजिए कि तीन फलक ABFE, AEHD और EFGH घनाभ के शीर्ष E पर मिलते हैं तथा इनके सम्मुख फलक DCGH, BFGC और ABCD शीर्ष C पर मिलते हैं। अतः E और C घनाभ के सम्मुख कोने या शीर्ष कहलाते हैं। E और C को मिलाने वाला रेखाखण्ड EC इस घनाभ का एक विकर्ण कहलाता है। इसी प्रकार, इस घनाभ के अन्य विकर्ण AG, BH और FD हैं। एक घनाभ के कुल चार विकर्ण होते हैं।

पृष्ठीय क्षेत्रफल



(i)



(ii)

आकृति 21.3

आकृति 21.3 (i) को देखिए। यदि इसे बिंदुकित रेखाओं के अनुदिश मोड़ा जाए, तो यह आकृति 21.3 (ii) में दर्शाया गया आकार ले लेती है, जो एक घनाभ है। स्पष्टतः आकृति 21.3 (ii) में प्राप्त इस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः l , b और h हैं। इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के बारे में आप क्या कह सकते हैं? स्पष्टतः इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल आकृति 21.3 (i) में सभी छः आयतों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

इस प्रकार, घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= l \times b + b \times h + h \times l + l \times b + b \times h + h \times l \\ &= 2(lb + bh + hl) \end{aligned}$$



इन धनों को गिन कर आप देख सकते हैं कि यह घनाभ 60 इकाई धनों से मिल कर बना है।
अतः इसका आयतन = 60 घन सेमी या 60 सेमी³ है क्योंकि इस स्थिति में, 1 इकाई धन का मान 1 सेमी³ है।

$$\begin{aligned} \text{आप यह भी देख सकते हैं कि लंबाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई} &= 5 \times 4 \times 3 \text{ सेमी}^3 \\ &= 60 \text{ सेमी}^3 \end{aligned}$$

आप इकाई धनों की भिन्न-भिन्न संख्याएं लेकर अन्य घनाभ बना सकते हैं तथा इन इकाई धनों को गिन कर इसके आयतन ज्ञात कर सकते हैं। आप सदैव यह पाएंगे कि घनाभ का आयतन

$$\text{घनाभ का आयतन} = \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\text{अर्थात् घनाभ का आयतन} = lbh$$

साथ ही, एक घन ऐसा घनाभ है जिसमें $l = b = h$ है।

$$\text{अतः भुजा } a \text{ वाले घन का आयतन} = a \times a \times a = a^3 \text{ है।}$$

आइए अब इन सूत्रों के प्रयोग को स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 21.1: एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4 सेमी, 3 सेमी और 12 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए:

(i) पृष्ठीय क्षेत्रफल, (ii) आयतन और (iii) विकर्ण

हल: (i) घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= 2(lb + bh + hl) \\ &= 2(4 \times 3 + 3 \times 12 + 12 \times 4) \text{ सेमी}^2 \\ &= 2(12 + 36 + 48) \text{ सेमी}^2 = 192 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) घनाभ का आयतन} &= lbh \\ &= 4 \times 3 \times 12 \text{ सेमी}^3 = 144 \text{ सेमी}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii) घनाभ का विकर्ण} &= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} \text{ सेमी} \\ &= \sqrt{16 + 9 + 144} \text{ सेमी} \\ &= \sqrt{169} \text{ सेमी} = 13 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

उदाहरण 21.2: लंबाई 3 मी, चौड़ाई 2 मी और मोटाई 25 सेमी वाले एक घनाभाकार पत्थर के स्लेब का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $l = 3$ मी, $b = 2$ मी और



टिप्पणी

$$h = 25 \text{ सेमी} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ मी}$$

(ध्यान दीजिए कि यहां तीसरी विमा मोटाई, ऊंचाई के स्थान पर है।)

$$\begin{aligned} \text{अतः वांछित आयतन} &= lbh \\ &= 3 \times 2 \times \frac{1}{4} \text{ मी}^3 = 1.5 \text{ मी}^3 \end{aligned}$$

उदाहरण 21.3 : किसी घन का आयतन 2197 सेमी³ है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल और विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि घन का किनारा a सेमी है।

$$\text{अतः इसका आयतन} = a^3 \text{ मी}^3$$

अतः दिये हुए प्रश्न से, हमें प्राप्त होता है;

$$a^3 = 2197$$

$$\text{या } a^3 = 13 \times 13 \times 13$$

$$\text{अतः, } a = 13$$

अर्थात् घन का किनारा = 13 सेमी है।

$$\begin{aligned} \text{अब, घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 6a^2 \\ &= 6 \times 13 \times 13 \text{ सेमी}^2 \\ &= 1014 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

$$\text{इसका विकर्ण} = a\sqrt{3} \text{ सेमी} = 13\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

इस प्रकार, घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 सेमी² है तथा विकर्ण $13\sqrt{3}$ सेमी है।

उदाहरण 21.4 : एक घनाभकार टंकी की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 5 मी और 4 मी हैं। यदि यह पानी से सम्पूर्ण रूप से भरी हुई है, तथा इसमें 60 मी³ पानी है, तो टंकी में पानी की गहराई ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कि गहराई d मीटर है।

$$\begin{aligned} \text{अतः, टंकी में पानी का आयतन} & \\ &= l \times b \times h \\ &= 5 \times 4 \times d \text{ मी}^3 \end{aligned}$$

अतः, दिये हुए प्रश्न के अनुसार,



टिप्पणी

$$5 \times 4 \times d = 60$$

$$\text{या } d = \frac{60}{5 \times 4} \text{ मी} = 3 \text{ मी}$$

अतः टंकी में पानी की गहराई 3 मी हैं।

नोट: किसी बर्तन के आयतन को प्रायः उसकी **धारिता** कहा जाता है। अतः यहाँ यह कहा जा सकता है कि टंकी की धारिता 60 मी³ है। धारिता को लीटरों के रूप में भी व्यक्त किया जाता है, जहाँ 1 लीटर = $\frac{1}{1000}$ मी³, अर्थात्, 1 मी³ = 1000 लीटर होता है।

अतः, यह भी कहा जा सकता है कि इस टंकी की धारिता 60×1000 लीटर = 60000 लीटर है। यह भी एक जानने योग्य बात है कि द्रवों को लीटरों में मापा जाता है।

उदाहरण 21.5 : 1.5 मी लंबा, 1.25 मी चौड़ा तथा 65 सेमी गहरा एक आयताकार लकड़ी का डिब्बा बनाया जाता है, जो ऊपर से खुला है। लकड़ी की मोटाई को नगण्य मानते हुए, ₹ 200 प्रति मी² की दर से इस डिब्बे को बनवाने में लगी लकड़ी की लागत ज्ञात कीजिए।

हल : आवश्यक लकड़ी का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= lb + 2bh + 2hl \text{ (क्योंकि डिब्बा ऊपर से खुला है।)}$$

$$= (1.5 \times 1.25 + 2 \times 1.25 \times \frac{65}{100} + 2 \times \frac{65}{100} \times 1.5) \text{ मी}^2$$

$$= (1.875 + \frac{162.5}{100} + \frac{195}{100}) \text{ मी}^2$$

$$= (1.875 + 1.625 + 1.95) \text{ मी}^2 = 5.450 \text{ मी}^2$$

अतः ₹ 200 प्रति मी² की दर से लकड़ी की लागत

$$= ₹ 200 \times 5.450$$

$$= ₹ 1090$$

उदाहरण 21.6 : 10 मी गहरी और 100 मी चौड़ी एक नदी 4.5 किमी प्रति घंटे की दर से बह रही है। इस नदी से समुंद्र में प्रति सैकेण्ड गिरने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : नदी में पानी के प्रवाह की दर = 4.5 किमी/घंटा

$$= \frac{4.5 \times 1000}{60 \times 60} \text{ मीटर/सैकेण्ड}$$



$$= \frac{4500}{3600} \text{ मीटर/सैकेण्ड}$$

$$= \frac{5}{4} \text{ मीटर/सैकेण्ड}$$

अतः प्रति सैकेण्ड में गिरने वाले पानी का आयतन = घनाभ का आयतन

$$= l \times b \times h$$

$$= \frac{5}{4} \times 100 \times 10 \text{ मी}^3$$

$$= 1250 \text{ मी}^3$$

उदाहरण 21.7: 588 मी लंबे और 50 मी चौड़े एक आयताकार खेत में एक 30 मी लंबी, 10 मी चौड़ी और 12 मी गहरी एक टंकी खोदी जाती है। इस प्रकार खोद कर निकाली गई मिट्टी को खेत के शेष भाग में एकसमान रूप से फैला दिया जाता है। इससे खेत की बढ़ी हुई ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल: खोदी गई मिट्टी का आयतन = 30 मी × 20 मी × 12 मी वाले घनाभ का आयतन

$$= 30 \times 20 \times 12 \text{ मी}^3 = 7200 \text{ मी}^3$$

खेत के शेष भाग का क्षेत्रफल

$$= \text{खेत का क्षेत्रफल} - \text{टंकी के ऊपरी भाग का क्षेत्रफल}$$

$$= 588 \times 50 \text{ मी}^2 - 30 \times 20 \text{ मी}^2$$

$$= 29400 \text{ मी}^2 - 600 \text{ मी}^2$$

$$= 28800 \text{ मी}^2$$

अतः, खेत की बढ़ी ऊंचाई

$$= \frac{\text{खोदी गई मिट्टी का आयतन}}{\text{खेत के शेष भाग का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{7200}{28800} \text{ मी} = \frac{1}{4} \text{ मी} = 25 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 21.8: किसी कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 7 मी, 4 मी और 3 मी हैं।

इसमें क्रमशः विमाओं $2 \text{ मी} \times 1 \frac{1}{2} \text{ मी}$ और $1 \frac{1}{2} \text{ मी} \times 1 \text{ मी}$ वाला 1 दरवाजा और 1 खिड़की है।

इस कमरे की दीवारों और छत पर ₹ 4 प्रति मी² की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।



टिप्पणी

हल: कमरे का आकार एक घनाभ जैसा है।

सफेदी कराए जाने वाला क्षेत्रफल = चारों दीवारों का क्षेत्रफल
+ छत का क्षेत्रफल

– दरवाजे का क्षेत्रफल – खिड़की का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}\text{चारों दीवारों का क्षेत्रफल} &= l \times h + b \times h + l \times h + b \times h \\ &= 2(l+b) \times h \\ &= 2(7+4) \times 3 \text{ मी}^2 = 66 \text{ मी}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{छत का क्षेत्रफल} &= l \times b \\ &= 7 \times 4 \text{ मी}^2 = 28 \text{ मी}^2\end{aligned}$$

$$\text{अतः कमरे में सफेदी कराने वाला क्षेत्रफल} = 66 \text{ मी}^2 + 28 \text{ मी}^2 - 2 \times 1 \frac{1}{2} \text{ मी}^2 - 1 \frac{1}{2} \times 1 \text{ मी}^2$$

$$= 94 \text{ मी}^2 - 3 \text{ मी}^2 - \frac{3}{2} \text{ मी}^2$$

$$= \frac{(188 - 6 - 3)}{2} \text{ मी}^2$$

$$= \frac{179}{2} \text{ मी}^2$$

अतः,

₹ 4 प्रति मी² की दर से सफेदी कराने का व्यय

$$= ₹ 4 \times \frac{179}{2} = ₹ 358$$

टिप्पणी: आप चारों दीवारों के क्षेत्रफल के लिए, सीधे सूत्र के रूप में चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= 2(l + b) \times h$ का प्रयोग कर सकते हैं।



देखें आपने कितना सीखा 21.1

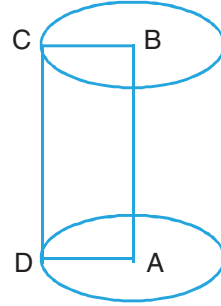
1. लंबाई 6 मी, चौड़ाई 3 मी और ऊंचाई 2.5 मी वाले एक घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. किनारे 3.6 सेमी वाले एक घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
3. उस घन का किनारा ज्ञात कीजिए, जिसका आयतन 3375 सेमी³ है। इस घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।



4. किसी बंद लकड़ी के डिब्बे की बाहरी विभाएं 42 सेमी \times 32 सेमी \times 27 सेमी हैं। यदि लकड़ी की मोटाई 1 सेमी है, तो इस डिब्बे का आंतरिक आयतन ज्ञात कीजिए।
5. किसी गोदाम की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 12 मीटर, 8 मीटर तथा 6 मीटर हैं। इस गोदाम में ऐसे कितने डिब्बें रखे जा सकते हैं, जबकि प्रत्येक डिब्बा 1.5 मी^3 स्थान घेरता है?
6. एक लकड़ी के शहतीर की लंबाई और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी चौड़ाई 3 मी, मोटाई 75 सेमी और आयतन 33.75 मी^3 है।
7. किनारे 8 सेमी वाले तीन घनों को सिरों से सिरा मिलाकर एक घनाभ बनाया जाता है। इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
8. एक कमरा 6 मी लंबा, 5 मी चौड़ा और 4 मी ऊंचा है। इस कमरे की दरवाजे और खिड़कियां 4 वर्ग मीटर स्थान घेरती हैं। कमरे की चारों दीवारों के शेष भाग पर 75 सेमी चौड़ा कागज ₹ 2.40 प्रति मीटर की दर से लगवाने की लागत ज्ञात कीजिए।
9. विभाओं 6 मी \times 4 मी \times 3 मी वाले एक कमरे में रखी जा सकने वाली सबसे अधिक लंबी छड़ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

21.3 लंब वृत्तीय बेलन

आइए एक आयत ABCD को उसके एक किनारे, मान लीजिए AB के चारों ओर घुमाएं। इस परिभ्रमण द्वारा जनित ठोस एक **लंब वृत्तीय बेलन (Right circular cylinder)** कहलाता है (देखिए आकृति 21.6)। दैनिक जीवन में हमें ऐसे अनेक ठोस मिलते हैं, जैसे पानी के पाइप, टिनों के डिब्बे, ड्रम, पाउडर के डिब्बे, इत्यादि। यह देखा जा सकता है कि एक लंब वृत्तीय बेलन के दोनों सिरों (या आधार) सर्वांगसम वृत्त हैं। आकृति 21.6, में, A और B इन दोनों वृत्तों के केंद्र हैं, जिनकी त्रिज्याएं AD (= BC) हैं। साथ ही, AB इन दोनों वृत्तों पर लंब है।



आकृति 21.6

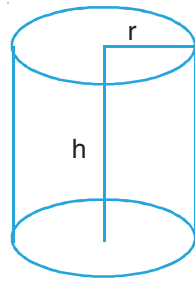
यहां AD (या BC) बेलन की **आधार त्रिज्या** तथा AB **ऊंचाई** कहलाती है। यह भी देखा जा सकता है कि दोनों वृत्ताकार सिरों से बना पृष्ठ **सपाट (Flat)** है, तथा शेष पृष्ठ **वक्रिय (Curved)** है।

पृष्ठीय क्षेत्रफल

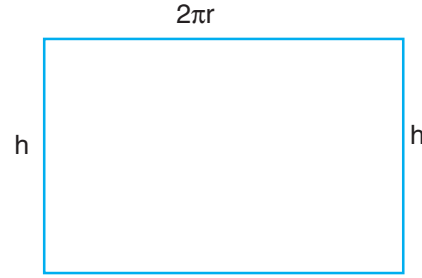
आइए त्रिज्या r और ऊंचाई h का एक खोखला बेलन लें तथा उसे दोनों वृत्तीय सिरों के केंद्रों को मिलाने वाले रेखाखण्ड के समान्तर किसी रेखा के अनुदिश काटें। देखिए आकृति 21.7(i)। हमें एक आयत प्राप्त होता है जिसकी लंबाई $2\pi r$ और ऊंचाई h हैं, जैसा कि आकृति 21.7(ii) में दर्शाया गया है, स्पष्टतः, इस आयत को क्षेत्रफल बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर है।



टिप्पणी



(i)



(ii)

आकृति 21.7

अतः बेलन का **वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल**

$$= \text{आयत का क्षेत्रफल}$$

$$= 2\pi r \times h = 2\pi rh$$

यदि बेलन बंद हो, तो बेलन का **कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल**

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r(r + h)$$

आयतन

एक घनाभ की स्थिति में, हमने देखा था कि उसका आयतन $= l \times b \times h$

$$= \text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{ऊंचाई}$$

इस नियम को एक लंब वृत्तीय बेलन (यह कल्पना करते हुए कि यह अपरिमित रूप से अनेक छोटे घनाभों से बना है) के लागू करते हुए, हमें प्राप्त होता है।

लंब वृत्तीय बेलन का आयतन

$$= \text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{ऊंचाई}$$

$$= \pi r^2 \times h$$

$$= \pi r^2 h$$

अब, हम इन सूत्रों का उपयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं। इस पाठ में जब तक

अन्यथा न कहा जाए, हम $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 21.9: किसी लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या और ऊंचाई क्रमशः 7 सेमी और 10 सेमी है। ज्ञात कीजिए इसका :

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल



(iii) आयतन

हल : (i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ सेमी}^2 = 440 \text{ सेमी}^2$$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh + 2\pi r^2$

$$= (2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 10 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7) \text{ सेमी}^2$$

$$= 440 \text{ सेमी}^2 + 308 \text{ सेमी}^2 = 748 \text{ सेमी}^2$$

(iii) आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10 \text{ सेमी}^3$$

$$= 1540 \text{ सेमी}^3$$

उदाहरण 21.10: धातु का एक खोखला बेलनाकार पाइप दोनों सिरों पर खुला है तथा इसका बाहरी व्यास 12 सेमी है। यदि पाइप की लंबाई 70 सेमी है तथा प्रयुक्त धातु की मोटाई 1 सेमी है, तो इस पाइप को बनाने में प्रयुक्त धातु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, पाइप की बाहरी त्रिज्या

$$= \frac{12}{2} \text{ सेमी} = 6 \text{ सेमी}$$

अतः इसकी आंतरिक त्रिज्या = $(6-1) = 5$ सेमी (क्योंकि धातु की मोटाई = 1 सेमी है।)

ध्यान दीजिए कि एक तरीके से यहां दो बेलन बने हैं

तथा प्रयुक्त धातु का आयतन

= बाहरी बेलन का आयतन - भीतरी बेलन का आयतन

= $\pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$ (जहाँ r_1 और r_2 क्रमशः बाहरी और भीतरी त्रिज्याएं हैं)

$$= \left(\frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 70 - \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 70 \right) \text{ सेमी}^3$$

$$= 22 \times 10 \times (36 - 25) \text{ सेमी}^3$$

$$= 2420 \text{ सेमी}^3$$



टिप्पणी

उदाहरण 21.11: किसी रोड रोलर की त्रिज्या 35 सेमी है और इसकी लंबाई 1 मीटर है। यदि यह किसी खेल के मैदान को चौरस करने के लिए 200 चक्कर लगाता है, तो ₹ 3 प्रति मी² की दर से उस मैदान को चौरस कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : एक चक्कर में रोलर द्वारा चौरस किया गया

क्षेत्रफल = रोलर का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 35 \times 100 \text{ सेमी}^2 \quad (r = 35 \text{ सेमी, } h = 1 \text{ मी} = 100 \text{ सेमी}) \\ &= 22000 \text{ सेमी}^2 \\ &= \frac{22000}{100 \times 100} \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

(क्योंकि 100 सेमी = 1 मी, अतः 100 सेमी × 100 सेमी = 1 मी × 1 मी)

$$= 2.2 \text{ मी}^2$$

अतः 200 चक्करों में मैदान का चौरस किया क्षेत्रफल = $2.2 \times 200 \text{ मी}^2 = 440 \text{ मी}^2$

अतः मैदान को ₹ 3 प्रति मी² से चौरस कराने का व्यय = ₹ 3 × 440 = ₹ 1320

उदाहरण 21.12: आयतन 1 मी³ वाली एक ठोस धातु को पिघलाकर 3.5 मिमी कास को एक तार के रूप में खींचा जाता है। इस बार बने तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि तार की लंबाई x मिमी है।

आप देख सकते हैं कि तार एक लंब वृत्तीय बेलन के आकार का है।

इसका व्यास = 3.5 मिमी

$$\text{अतः, इसकी त्रिज्या} = \frac{3.5}{2} \text{ मिमी} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4} \text{ मिमी}$$

साथ ही, तार की लंबाई को बेलन की ऊँचाई समझा जाता है।

$$\begin{aligned} \text{अतः बेलन का आयतन} &= \pi r^2 h \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times x \text{ मिमी}^3 \end{aligned}$$

परंतु तार 1 मी³ आयतन से बनाया गया है।

$$\text{अतः, } \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{x}{1000000000} = 1 \quad (\text{क्योंकि } 1 \text{ मी} = 1000 \text{ मिमी})$$



$$\text{या } x = \frac{1 \times 7 \times 4 \times 4 \times 1000000000}{22 \times 7 \times 7} \text{ मिमी}$$

$$= \frac{16000000000}{154} \text{ मिमी}$$

अतः, तार की लंबाई

$$= \frac{16000000000}{154} \text{ मिमी}$$

$$= \frac{16000000000}{154000} \text{ मी}$$

$$= \frac{16000000}{154} \text{ मी} = 103896 \text{ मी (लगभग)}$$



देखें आपने कितना सीखा 21.2

1. त्रिज्या 5 मीटर और ऊंचाई 1.44 मी वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. किसी लंब वृत्तीय बेलन का आयतन 3080 सेमी³ है तथा इसके आधार की त्रिज्या 7 सेमी है। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक बेलनाकार पानी की टंकी का आधार व्यास 7 मीटर और ऊंचाई 2.1 मीटर है। इस टंकी की धारिता लीटर में ज्ञात कीजिए।
4. किसी कागज की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 33 सेमी और 16 सेमी है। इसे इसकी चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर एक बेलन बनाया जाता है। इस बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।
5. आधार व्यास 28 सेमी और ऊंचाई 12 सेमी की एक बेलनाकार बाल्टी पानी से पूरी भरी हुई है। इस पानी को एक आयताकार टब में डाला जाता है, जिसकी लंबाई 66 सेमी और चौड़ाई 28 सेमी है। वह ऊंचाई ज्ञात कीजिए जिस तक पानी टब में चढ़ जाएगा।
6. एक खोखला धातु का बेलन दोनों सिरों से खुला हुआ है तथा इसकी लंबाई 8 सेमी है। यदि धातु की मोटाई 2 सेमी है तथा बेलन का बाहरी व्यास 10 सेमी है, तो बेलन का सम्पूर्ण वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए).

[संकेत : सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ = आंतरिक वक्र पृष्ठ + बाहरी वक्र पृष्ठ]



12. आयतन 606.375 मी^3 वाले एक गोले की त्रिज्या और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
13. 12 मी लंबी, 4 मी चौड़ाई और 3 मी ऊँचाई वाले एक कमरे में विमाओं $2 \text{ मी} \times 1 \text{ मी}$ वाली दो खिड़कियाँ हैं और विमाओं $2.5 \text{ मी} \times 2 \text{ मी}$ वाला एक दरवाजा है। इसकी दीवारों पर ₹ 30 प्रति सेमी^2 की दर से कागज लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
14. एक घन सेन्टीमीटर सोने का व्यास 0.2 मिमी वाले एक तार के रूप में खींचा जाता है। तार की लंबाई ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।
15. यदि किसी गोले की त्रिज्या तिगुनी कर दी जाए, तो निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए:
 - (i) प्रारंभिक गोले का आयतन और नए गोले का आयतन
 - (ii) प्रारंभिक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और नए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल
16. एक शंकु, बेलन और अर्द्धगोला एक ही आधार और एक ही ऊँचाई के हैं। इनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
17. किसी लंब वृत्तीय शंकु की तिर्यक ऊँचाई और त्रिज्या क्रमशः 25 सेमी और 7 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए कि
 - (i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
 - (ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल, तथा
 - (iii) आयतन
18. भुजा 5 सेमी वाले चार घनों को सिरों से सिरा मिलाकर एक पंक्ति में रख लिया जाता है। परिणामी घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
19. दो बेलनों की त्रिज्याएं 3 : 2 के अनुपात में हैं तथा उनकी ऊँचाइयाँ 7 : 4 के अनुपात में हैं। उनके
 - (i) आयतनों का अनुपात तथा
 - (ii) वक्र पृष्ठीय अनुपात ज्ञात कीजिए।
20. बताइए कि निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य:
 - (i) भुजा a वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2$ होता है।
 - (ii) एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल πrl होता है, जहाँ r और l क्रमशः शंकु की आधार त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई है।
 - (iii) यदि एक शंकु और अर्द्धगोले की आधार त्रिज्या और ऊँचाई एक ही हों, तो अर्द्धगोले का आयतन शंकु के आयतन का तिगुना होता है।

मॉड्यूल-4 क्षेत्रमिति



टिप्पणी

8. दो लंब वृत्तीय बेलनों की त्रिज्याएँ 4 : 5 के अनुपात में तथा उनकी ऊँचाइयाँ 5 : 3 के अनुपात में हैं। उनके आयतनों में अनुपात ज्ञात कीजिए। 2
9. 9 मी ऊँचे एक लकड़ी के ठोस शंकु के आधार की परिधि 44 मी है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए। 2
10. 41 सेमी व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए। 2
11. एक लंब वृत्तीय शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई 5 : 12 के अनुपात में है। यदि इसका आयतन 314 मी³ है, तो इसकी तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए) 4
12. एक मैदान 200 मी लम्बा ओर 75 मी चौड़ा है। इसमें 40 मी लम्बा, 20 मी चौड़ा और 10 मी गहरा तालाब खोदा गया और निकाली गई मिट्टी को मैदान में फैला दिया गया। मैदान के तल में कितनी वृद्धि हुई? 6