

# Mathematics

## गणित

(311)

Assignment - I

मूल्यांकन पत्र - I

(Lessons 1-11)

(पाठ 1 से 11 तक)

Max. Marks: 25

कुल अंक : 25

**Note:** (i) All questions are compulsory. Each question carries equal marks.

**टिप्पणी:** सभी प्रश्नों के उत्तर देने अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के अंक समान हैं।

(ii) Write your name, enrolment number, AI name and subject etc. on the top of the first page of the answer sheet.

उत्तर पुस्तिका के प्रथम पष्ठ पर ऊपर की ओर अपना नाम, अनुक्रमांक, अध्ययन केन्द्र का नाम, विषय आदि स्पष्ट शब्दों में लिखिए।

1. Answer any two of the following questions:

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए:

(a) If  $\omega$  is a complex cube root of unity, then show that

$$(1 + 5\omega^2 + \omega^4)(1 + 5\omega + \omega^2)(5 + \omega + \omega^2) = 64$$

यदि संख्या 1 का  $\omega$  सम्मिश्र धनमूल हो, तो दर्शाइए कि

$$(1 + 5\omega^2 + \omega^4)(1 + 5\omega + \omega^2)(5 + \omega + \omega^2) = 64$$

(b) Show that the roots of the equation

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

are always real and they cannot be equal unless  $a = b = c$

दर्शाइए कि समीकरण

$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$  के मूल सदा वास्तविक होंगे तथा

यह तब तक समान नहीं होंगे जबतक कि  $a = b = c$

(c) A point moves such that the sum of its distances from the point  $(ae, 0)$  and  $(-ae, 0)$  is  $2a$ . Show that the locus of this point is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

एक बिन्दु इस प्रकार गतिशील है कि इस की बिन्दुओं  $(ae, 0)$  तथा  $(-ae, 0)$  से दूरियों का

योग  $2a$  है। दर्शाइए कि इस बिन्दु का बिन्दु पथ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$  होगा।

2. Answer any two of the following questions:

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए:

- (a) Find the equation of the line through the intersection of the lines  $3x + y + 7 = 0$  and  $3x - y - 15 = 0$  and which is perpendicular to the line  $5x - 4y + 1 = 0$ .

रेखाओं  $3x + y + 7 = 0$  तथा  $3x - y - 15 = 0$  के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $5x - 4y + 1 = 0$  लम्बवत् हो।

- (b) A question paper contains 12 questions divided into two sections. Section I contains 7 questions and section II contains 5 questions. In how many ways can a candidate choose the questions if he has to select 8 questions in all with the restriction of at least 3 questions from each section?

एक प्रश्न पत्र में 12 प्रश्न हैं जो दो खण्डों में बटे हैं। खण्ड 1 में 7 प्रश्न हैं तथा खण्ड 2 में 5 प्रश्न हैं। एक परीक्षार्थी को 8 प्रश्नों के उत्तर देने हैं जिस में प्रत्येक खण्ड से कम से कम 3 प्रश्नों को लेना आवश्यक है। वह कितनी विधियों से प्रश्नों का चयन कर सकेगा?

- (c) If the coefficients of  $x^{r-1}$ ,  $x^r$  and  $x^{r+1}$  in the expansion of  $(1 + x)^n$  are in A.P, then show that

$$n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$$

यदि  $(1 + x)^n$  के प्रसार में  $x^{r-1}$ ,  $x^r$  तथा  $x^{r+1}$  के गुणांक समांतर श्रेणी में हों, तो दर्शाइए कि

$$n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$$

3. Solve graphically the system of inequations

$$4x - 7y + 5 \leq 0$$

and  $3x + 2y - 18 \geq 0$

आलेखीय विधि द्वारा असमीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$\left[ \begin{array}{cc} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{array} \right] \begin{array}{l} a^2 \\ b^2 \\ (a+b)^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 4x - 7y + 5 \leq 0 \\ 3x + 2y - 18 \geq 0 \end{array} \right.$$

Or (अथवा)

Let  $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \alpha / 2 \\ \tan \alpha / 2 & 0 \end{bmatrix}$  and I be the identity matrix of order 2. Show that

$$(I + A) = (I - A)$$

माना  $A =$

तथा I, द्वितीय कोटि का तत्समक आव्यूह है। दर्शाइए कि

$$(I + A) = (I - A)$$

4. Using properties of determinants, prove that

सारणिकों के गुण धर्मों का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

Or (अथवा)

$$\text{Let } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}. \text{ Find } AB.$$

Use this to solve the following system of equations:

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 17 \\ y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

माना  $A =$

$AB$  ज्ञात कीजिए।

इस के प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 17 \\ y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

## 5. Project work

Consider the following equations:

- (i)  $x^2 + 2x + 1 = 0$
- (ii)  $x^2 + 4x + 3 = 0$
- (iii)  $x^3 - 1 = 0$
- (iv)  $x^2 + 2x + 5 = 0$

We are interested in solving the above equations.

Let us make the following table for finding their solutions:

S.No.	Equation	Factor form	Roots if they exist	Reasons for that
(i)	$x^2 + 2x + 1 = 0$	$(x+1)(x+1)=0$	-1, -1	Exist in reals
(ii)	$x^2 + 4x + 3 = 0$	$(x+1)(x+3)=0$	-1, -3	- do-
(iii)	$x^3 - 1 = 0$	$(x-1)(x^2+x+1)=0$	$x=1$ , only no real root	does not exist in real
(iv)	$x^2 + 2x + 5 = 0$	Cant be factored in reals	for $x^2 + 2x + 5 = 0$ Do not exist in reals	does not exist in reals

What do you observe from the above table? You see that for all these equations for which the discriminant ( $b^2-4ac$ ) is negative, the roots do not exist in reals as square root of negative do not exist in reals.

This points out to the need of extension of real number system to another system, which allows square root of negative numbers and hence the solution of all types of equations. This is the reason for bringing in the complex numbers.

### परियोजना कार्य

निम्न समीकरणों को देखिए:

(i)  $x^2 + 2x + 1 = 0$

(ii)  $x^2 + 4x + 3 = 0$

(iii)  $x^3 - 1 = 0$

(iv)  $x^2 + 2x + 5 = 0$

हम इन समीकरणों के मूल ज्ञात करने के इच्छुक हैं। आइए हम निम्न तालिका बनाएँ:

क्रमांक	समीकरण	गुणनखण्ड रूप	मूल, यदि उनका अस्तित्व हो	कारण
(i)	$x^2 + 2x + 1 = 0$	$(x+1)(x+1)=0$	-1, -1	वास्तविक संख्याओं में हैं
(ii)	$x^2 + 4x + 3 = 0$	$(x+1)(x+3)=0$	-1, -3	- do-
(iii)	$x^3 - 1 = 0$	$(x-1)(x^2+x+1)=0$	1 के अतिरिक्त कोई मूल	का मान वास्तविक संख्याओं में नहीं है।
(iv)	$x^2 + 2x + 5 = 0$	नहीं किये जा सकते	नहीं कोई मूल नहीं	का मान वास्तविक संख्याओं में नहीं है।

उपरोक्त तालिका में आप क्या देखते हैं? आप पाते हैं कि उन सभी समीकरणों, जिनके लिए विविक्तकर ( $b^2-4ac$ ) ऋणात्मक है के मूल वास्तविक संख्याओं में नहीं होते क्योंकि उन में ऋण संख्याओं का वर्गमूल नहीं होता। यह इंगित करता है कि हमें वास्तविक संख्याओं को एक ऐसे संख्या समूह तक बढ़ाया जाए जिस में ऋण संख्याओं का वर्गमूल भी हो तथा सभी प्रकार के समीकरणों के मूल हों। यह सम्मिश्र संख्याओं के समूह के लाने का कारण है।

$$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{-16}$$

# Mathematics

## गणित

(311)

Assignment - II

मूल्यांकन पत्र - II

(Lessons 12-21 )

(पाठ 12 से 21 तक)

Max. Marks: 25

कुल अंक : 25

**Note:** (i) All questions are compulsory. Each question carries equal marks.

**टिप्पणी:** सभी प्रश्नों के उत्तर देने अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के अंक समान हैं।

(ii) Write your name, enrolment number, AI name and subject etc. on the top of the first page of the answer sheet.

उत्तर पुस्तिका के प्रथम पष्ठ पर ऊपर की ओर अपना नाम, अनुक्रमांक, अध्ययन केन्द्र का नाम, विषय आदि स्पष्ट शब्दों में लिखिए।

1. Answer any two of the following questions:

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए:

(a) If the sum of first  $n$  terms of two arithmetic progression are in the ratio  $(7n + 1) : (4n + 27)$ , find the ratio of their 11th terms.

यदि दो समांतर श्रेणियों के प्रथम  $n$  पदों के योग में  $(7n + 1) : (4n + 27)$  का अनुपात है तो उनके 11वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

(b) Find the sum of first  $n$  terms of the series

$$3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + \dots$$

निम्नलिखित श्रेणी के प्रथम  $n$  पदों का योग ज्ञात कीजिए:

$$3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + \dots$$

(c) Sum the series.

$$(x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \dots \text{ upto } n \text{ terms.}$$

निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए:

$$(x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \dots n \text{ पदों तक।}$$

2. Answer any two of the following questions:

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए:

(a) Let  $f(x) = x^2 + 3$ ,  $g(x) = x - 2$ , then find  $f \circ g$  and  $g \circ f$ . Also, show that  $(f \circ g)(3/2) = (g \circ f)(3/2)$ .

यदि  $f(x) = x^2 + 3$ ,  $g(x) = x - 2$ , है, तो  $f \circ g$  तथा  $g \circ f$  ज्ञात कीजिए

यह भी दर्शाइए कि  $(f \circ g)(3/2) = (g \circ f)(3/2)$

(b) Prove that

$$\cos^3 A \sin 3A + \sin^3 A \cos 3A =$$

सिद्ध कीजिए कि:

$$\cos^3 A \sin 3A + \sin^3 A \cos 3A =$$

(c) Find the derivative of \_\_\_\_\_ using first principles.

प्रथम सिद्धान्त का प्रयोग करते हुए \_\_\_\_\_ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

3. The focus of a parabola is (1, 5) and its directrix is  $x + y + 2 = 0$ . Find the equation of the parabola, its vertex and the length of latus rectum.

एक परवलय की नाभि (1, 5) तथा नियता  $x + y + 2 = 0$  है इस परवलय का समीकरण, उसका शीर्ष तथा नाभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

**Or (अथवा)**

Show that:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + 5} \sin 3x}{4 \tan 2x}, & \text{if } x < 0 \\ \frac{3}{2}, & \text{if } x = 0 \\ \frac{\log(1+3x)}{e^{2x} - 1}, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

दर्शाइए की फलन: \_\_\_\_\_  
 if  $x=0$  is continuous at  $x=0$   
 if  $x > 0$   $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}, & \text{यदि } x < 0 \\ \frac{3}{2}, & \text{यदि } x=0, x=0 \text{ पर सतत् है।} \\ \frac{\log(1+3x)}{e^{2x} - 1}, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$

4. Solve the equation:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

निम्न समीकरण को हल कीजिए:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

**Or (अथवा)**

In any triangle ABC, prove that

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} \cdot \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \cdot \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \cdot \sin 2C = 0$$

किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए:

## 5. Project Work

Consider the function  $f(x) =$

We need to find  $f(4)$

Let us form the following table:

x	3.7	3.8	3.9	3.95	4	4.05	4.1	4.2	4.3
f(x)	7.7	7.8	7.9	7.95	%	8.05	8.1	8.2	8.3

- When  $x$  changes from 3.7 to 3.95 what change do you observe in the value of  $f(x)$ ?
- Do you observe  $f(x)$  approaching some values? What is that value?
- When  $x$  changes from 4.3 to 4.05, what change do you observe in the value of  $f(x)$ ?
- Do you observe  $f(x)$  approaching some value? What is that value?

What can you say about

### परियोजना कार्य

एक फलन  $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$  को लीजिए

हमें  $f(x)$  का मान ज्ञात करना है

आइए हम निम्न तालिका बनाएँ

x	3.7	3.8	3.9	3.95	4	4.05	4.1	4.2	4.3
f(x)	7.7	7.8	7.9	7.95	%	8.05	8.1	8.2	8.3

- जब  $x$  का मान, 3.7 से 3.95 तक बदलता है, तो आप  $f(x)$  के मान में क्या बदलाव पाते हैं?
- क्या आप  $f(x)$  को किसी मान की तरफ उपगमन करता देखते हैं? वह मान क्या है?
- जब  $x$  का मान, 4.3 से 4.5 तक बदलता है, तो आप  $f(x)$  के मान में क्या बदलाव पाते हैं?
- क्या आप  $f(x)$  के मान को किसी एक संख्या की ओर जाता देखते हैं? वह मान क्या है?

आप के विषय में क्या कह सकते हैं?

# Mathematics

## गणित

(311)

Assignment - III

मूल्यांकन पत्र - III

(Lessons 22-31)

(पाठ 22 से 31 तथा अन्य पाठ-वैकल्पिक मॉड्यूल्स)

Max. Marks: 25

कुल अंक : 25

**Note:** (i) All questions are compulsory. Each question carries equal marks.

**टिप्पणी:** सभी प्रश्नों के उत्तर देने अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के अंक समान हैं।

(ii) Write your name, enrolment number, AI name and subject etc. on the top of the first page of the answer sheet.

उत्तर पुस्तिका के प्रथम पष्ठ पर ऊपर की ओर अपना नाम, अनुक्रमांक, अध्ययन केन्द्र का नाम, विषय आदि स्पष्ट शब्दों में लिखिए।

1. Answer any two of the following questions:

निम्न में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{a+b+2x}{b+x} \right)^{a+b+2x} \tan x, \text{ find } f(x) \text{ at } \frac{dx}{dx} = \frac{\pi}{4}$$

यदि  $f(x) = \left( \frac{a+x}{b+x} \right)^{a+b+2x}$  तो  $f'(x)$  का मान  $x=0$  पर ज्ञात कीजिए।

(b) If

यदि  $y = \left[ (\tan x)^{\tan x} \right]^{\tan x}$  तो का मान पर ज्ञात कीजिए।

(c) Show that the two tangents to the curve  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ ,  $a > 0$  at the points, where the curve crosses x-axis, are parallel.

दर्शाइए कि वक्र  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ ,  $a > 0$  के उन बिन्दुओं, जहाँ वक्र x-अक्ष को प्रतिच्छेद करती है, पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं।

2. Answer any two of the following questions:

निम्न में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(a) Tangents are drawn to the parabola  $x^2 = 4y$  at its point of intersection with another parabola  $y^2 = 4x$ . Find the point of intersection of the tangents drawn.

परवलय  $x^2 = 4y$  के उन बिन्दुओं, जहाँ यह एक दूसरे परवलय  $y^2 = 4x$  को प्रतिच्छेद करता है, पर स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। इन स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

- (b) Show that the function  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  is an increasing function if  $x > 0$ .

दर्शाइए की फलन  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  एक वर्धमान फलन है जब  $x > 0$  है।

- (c) A cone of maximum volume is inscribed in a given sphere. Find the ratio of the height of the cone to the diameter of the sphere.

अधिकतम आयतन का एक शंकु एक गोले के अन्तर्गत बनाया गया है। शंकु की ऊँचाई तथा गोले के व्यास में अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. (a) Find the general solution of the following differential equation:

निम्न अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

$$\left[ 2\sqrt{xy} - x \right] dy + y dx = 0$$

**Or (अथवा)**

Evaluate:

मान ज्ञात कीजिए

$$\int \frac{\sin^3 x}{(1 + \cos^2 x)\sqrt{1 + \cos^2 x + \cos^4 x}} dx$$

- (b) Evaluate

मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\sin^3 x + \cos^3 x)} dx$$

4. (a) The mean of 5 observations is 4 and their variance is 5.2. If three of these observations are 1, 2 and 6. Find the other two observations.

पाँच प्रेक्षणों का माध्य 4 है तथा उनका प्रसरण 5.2 है। यदि इनमें से तीन प्रेक्षण 1, 2 तथा 6 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

- (b) if  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  and  $|\vec{a}| = 4$ , then find the value of  $|\vec{b}|$ .

यदि  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  तथा  $|\vec{a}| = 4$ ; तो  $|\vec{b}|$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Or (अथवा)**

The marginal revenue function of a commodity is given as  $MR = 12 - 3x^2 + 4x$ . Find the total revenue function and the corresponding demand function.

किसी वस्तु का उपांत राजस्व फलन  $MR = 12 - 3x^2 + 4x$  द्वारा देय है। कुल राजस्व फलन तथा संगत मांग फलन ज्ञात कीजिए।

### 5. Project work

The table below gives the percentage of Girls enrolment in the country by stage at different times.

Year	Primary	Middle	Secondary/senior secondary
1980-81	38.6	32.9	29.6
1990-91	41.5	36.7	32.9
1994-95	42.9	39.3	35.9
2001-2002	44.5	41.8	49.5
2007-2008	---	---	---

Source: Education in India-<http://education.nic.in/htm/web/edusta.html>(26/7/2005)

- What do you observe about the girls enrolment at different stages of education over the given years? Is it always increasing over time or at some stage it has become stagnant or decreased?
- In what year and what stage is the girl's enrolment almost equal to that of boy's enrolment?
- Make a plan to conduct survey of about 20 schools in your state/U.T. (or your city) about girls and boys enrolment at different stages of education and fill in the entries in the last row of the table. What method will you follow for the same.
- The collected data shows the same trend as in the previous four rows or it is different.

### परियोजना कार्य

निम्न तालिका में हमारे देश में बालिकाओं की विद्यालयों के विभिन्न स्तरों पर भरती विभिन्न समय अन्तरालों में दी गई है:

वर्ष	प्राथमिक	पूर्व माध्यमिक	माध्यमिक/उच्चतर माध्यमिक
1980-81	38.6	32.9	29.6
1990-91	41.5	36.7	32.9
1994-95	42.9	39.3	35.9
2001-2002	44.5	41.8	49.5
2007-2008	---	---	---

Source: Education in India-<http://education.nic.in/htm/web/edusta.html>(26/7/2005)

- (i) दिये गये वर्ष अन्तरालों में बालिकाओं की विद्यालयों के विभिन्न स्तरों पर की गई भरती के विषय में आप क्या प्रेक्षण करते हैं? क्या समय के साथ-साथ यह बढ़ती जा रही है अथवा किसी स्तर पर यह स्थिर, अथवा कम हो गई है?
- (ii) किस वर्ष तथा किस स्तर पर बालिकाओं की भरती बालकों की भरती के लगभग समान है?
- (iii) अपने राज्य/संघ राज्य (अथवा अपने नगर) के लगभग 20 विद्यालयों में बालकों तथा बालिकाओं की विभिन्न स्तर पर भरती की स्थिति जानने के लिए एक सर्वेक्षण की योजना बनाइये तथा तालिका की अंतिम पंक्ति में एकत्रित आँकड़ों की प्रविष्ट कीजिए। इसके लिये आप क्या तरीका अपनायेंगे।
- (iv) एकत्रित आँकड़े क्या वही प्रवृत्ति दिखाते हैं जो पहली चार पंक्तियों के आँकड़े दर्शाते हैं।